180×250mm | 横线

I AM SORRY
FOR WHAT I SAID
WHEN I WAS

HUNGRY

数学

B5 | 横线本

ILLUMINATION PRESENTS
MINIONS

加油!!! ^v^

2.5

一、直线与方程
1、直线的基础
2、直线的方程
4、点直线距离公式、后面[倒叙]
二、圆锥曲线
3、椭圆的定义与标准方程（先省略）

三、4.圆的方程
5.直线与圆的位置关系
6.圆与圆位置关系
7.直线与圆的习题课

8.椭圆的习题课
9.双曲线的定义与标准方程
10.双曲线习题课
11.抛物线的定义
12.抛物线的习题课
13.[考点精华] 椭圆的第一定义与方程
14.[考点精华] 椭圆中的焦点三角形问题
15.点差法
16.椭圆的进阶
17.双曲线方程求法
18.双曲线与几何小题

直线与方程

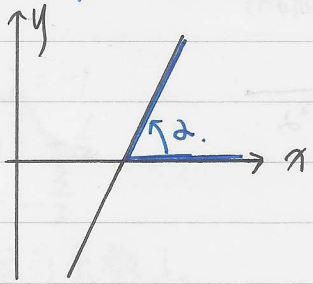
1. 直线的基础.

直线基础 { 倾斜角与斜率的定义
直线的平行与垂直

一. 倾斜角与斜率的定义.

$y=kx+b$. k. 倾斜角: x轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角.

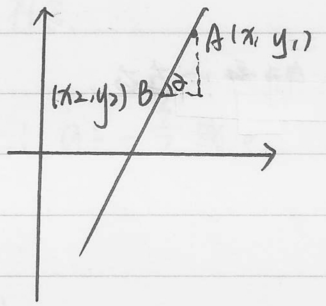
例:



$\alpha \in [0, \pi)$

与x轴平行直线 倾斜角为$0°$

斜率: $k = \tan\alpha$.



$\tan\alpha = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (要对应好).

斜率与倾斜角区别. $k=\tan\alpha$. $\alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$.

例: 与x轴垂直的直线有倾斜角为$90°$. 但无k.

每条直线都有倾斜角. 但不是每条直线都有斜率.

判断: 直线倾斜角为α. 则 $\sin\alpha>0$. (×) $\alpha\in[0,\pi)$ $\sin 0=0$

斜率相等两条直线的倾斜角一定相等 (√)

若直线倾斜角为α. 则此直线斜率必为$\tan\alpha$. (×) 例: 垂直于x轴.

若直线斜率为$\tan\alpha$. 则直线倾斜角必为α. (×) 例: $\tan 45°=1$
$\tan(360°+45°)=1$

倾斜角坑人题.

1. 已知直线 $l: x+2(\sin^2\alpha-1)y+1=0$ 的倾斜角为 α. 则 α 值为 $\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{2}$.

补：直线一般式 $Ax+By+C=0$.

① k存在 $\tan\alpha=k$

简化：$y=\frac{-1}{2(\sin^2\alpha-1)}x-\frac{1}{2(\sin^2\alpha-1)}$

$\therefore k=\frac{1}{2(1-\sin^2\alpha)}=\frac{1}{2\cos^2\alpha}$

$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos^2\alpha}$

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=1$

$\sin2\alpha=1$

$2\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

② k不存在.

$x+2(\sin^2 90^\circ-1)y+1=0$

$x=-1$

$\therefore$ 符合.

二. 直线的平行与垂直.

1. 直线的平行与垂直判定. 注：若直线 l_1 与 l_2 斜率均存在.

$k_1=k_2$ 平行或垂合.

$k_1\cdot k_2=-1$ 垂直.

坑题.

平行 ① 如果两条直线 ① $x+2ay-1=0$ 与直线 ② $(3a-1)x-4ay-1=0$ 平行. 则a等于(C)

A. 0 B. $-\frac{1}{3}$ C. 0或$-\frac{1}{3}$ D. 0或1

[1]

① $y=\frac{1}{2a}(-x+1)$ $k_1=-\frac{1}{2a}$

② $y=\frac{1}{4a}[(3a-1)x-1]$ $k_2=\frac{3a-1}{4a}$

$k_1=k_2$ $-\frac{1}{2a}=\frac{3a-1}{4a}$

$a=-\frac{1}{3}$ 此为第一种情况. 有k.

[2] 无k时.

即y前系数为0. 即 $a=0$. 第一条直线 $x=1$

第二条直线 $-x-1=0$ $x=-1$ $\therefore$ 符合.

综上: $a=-\frac{1}{3}$或0.

故选C.

②垂直：若直线①$ax+2y+6=0$和直线②$x+a(a+1)y+(a^2-1)=0$垂直，则a的值为 $-\frac{3}{2}$或0.

① $k_1 \cdot k_2 = -1$ 有k

$y_1 = \frac{1}{2}(-ax-6) \Rightarrow k_1 = -\frac{a}{2}$

$y_2 = \frac{1}{a(a+1)}[-x-(a^2-1)] \Longrightarrow k_2 = -\frac{1}{a(a+1)}$

$\therefore -\frac{a}{2} \cdot (-\frac{1}{a(a+1)}) = -1$

$a+1 = -\frac{1}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$

② ∵式子①中y前已经有系数］. 无k.

∴得使x前系数为0. 代入$a=0$.

代入① $a=0$时：$y_1 = -3$

代入② $x=1$

∴符合.

综上：$a = -\frac{3}{2}$或0.

例题系列：

①若$A(1,2)$ $B(5,-4)$ $C(9,t)$三点不能构成三角形，则$t =$ <u>-10</u>.

解析：当3点共线时．不能构成三角形

⇓

即任意两点构成直线 $k_1 = k_2$

$k_{AB} = -\frac{3}{2}$

$k_{BC} = \frac{t-(-4)}{9-5} = \frac{t+4}{4}$

$\therefore -\frac{3}{2} = \frac{t+4}{4}$

$t = -10$

② 三直线 $ax+2y-1=0$，$3x+y+1=0$，$2x-y+1=0$ 不能构成一个三角形，则实数 a 的取值范围是 $\{6, -4, -\frac{3}{2}\}$

解析：①　$k_1=-\frac{a}{2}$

$k_2=-3$

$k_3=2$

存在两条直线平行

∴ ① $k_1=k_2$　$a=6$

② $k_1=k_3$　$a=-4$

3条直线交于一点

②
$$\begin{cases}3x+y+1=0 & ① \\ 2x-y+1=0 & ②\end{cases}$$

①+②　$5x=-2$　$x=-\frac{2}{5}$

∴ 交点为 $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

再将该点代入直线1.

$a(-\frac{2}{5})+2\cdot\frac{1}{5}-1=0$

$a=-\frac{3}{2}$

∴ 综上：a 的值为 6，-4 或 $-\frac{3}{2}$

总结：每条直线都有倾斜角.

但有些直线没有斜率.

无 k 情况下 $k_1=k_2$，$k_1\cdot k_2=-1$ 皆不可用，要单独验证.

2. 直线的方程

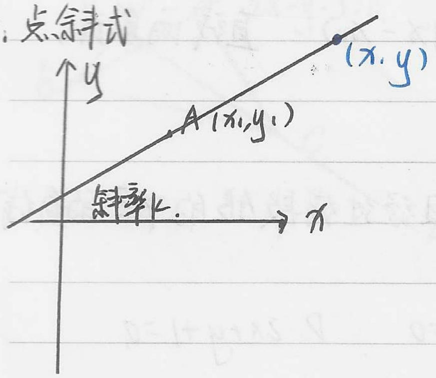
直线解析式 $\begin{cases} \text{点斜式与两点式} \\ \text{求直线综合练习.} \end{cases}$

回顾

$y=kx+b$ 　　k为斜率　　$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

点斜式

一. 点斜式



$k=\dfrac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=k(x-x_1)$ 直线点斜式

例：若已知点 $(2,3)$，$k=4$. 则解析式 $y=\underline{4x-5}$

$y-3=k(x-2)$

即 $4x-y-5=0$

"$Ax+By+C=0$" 直线一般式

小结：已知一点. 和斜率. 一定能求出该直线的方程.

例题：① 直线 l 过点 $(-1,2)$ 且与直线 $2x-3y+9=0$ 垂直. 则 l 的方程是 $\underline{3x+2y-1=0}$

$k_2=\dfrac{2}{3}$ 　　$\because k_1\cdot k_2=-1$

$\therefore k_1=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 用点斜式 $y-2=-\dfrac{3}{2}[x-(-1)]$

$\therefore l:\ 3x+2y-1=0$

② 已知点 $A(5,2)$ $B(-1,4)$，则 AB 的垂直平分线方程为 $\underline{3x-y-3=0}$.

l_{AB} 　$k_1=-\dfrac{1}{3}$ 　<①求斜率

$\therefore l$ 　$k_2=3$

②求中点座标

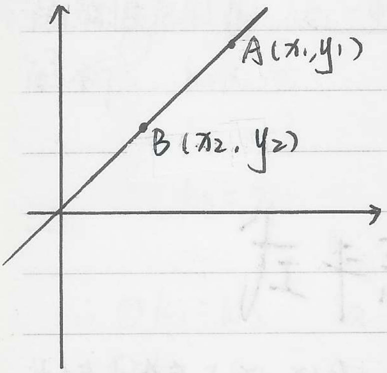
$G:(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$ 　$\therefore G(2,3)$

$\therefore$ 已知点 $(2,3)$，斜率3.

用点斜式 　　$l:\ 3x-y-3=0$

两点式

二、两点式



设假装不知道B的座标

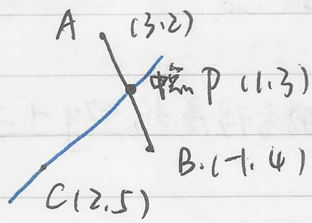
$$y-y_1=k(x-x_1)$$

$$k \downarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$ 再代入

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$ 直线两点式。

例题：已知点A(3,2) B(-1,4)，则经过点C(2,5)且经过线段AB的中点的直线方程为（C）

A. $2x+y-1=0$　B. $2x-y+1=0$　C. $2x-y+1=0$　D. $2x+y+1=0$.



用两点式，

$$y-3=\frac{3-5}{1-2}(x-1)$$

$\therefore$ $2x-y+1=0$.　选C.

总结：点斜式　$y-y_0=k(x-x_0)$　已知1个点和斜率

两点式　$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$　已知2个点

一般式　$Ax+By+C=0$　$(A^2+B^2\neq0)$

截距式　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　$(a\neq0\ \ b\neq0)$

a：x轴上截距　b：y轴上截距.

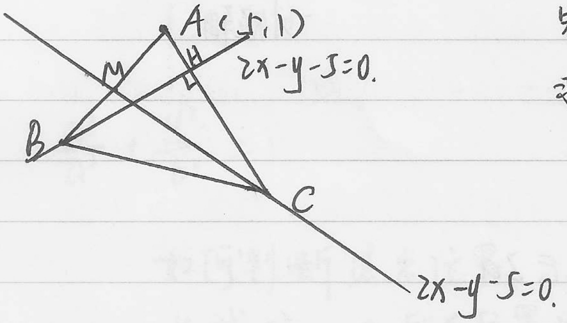
斜截式　$y=kx+b$

k：斜率　b：y轴截距.

三. 直线的方程综合练习.

1. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5,1)$，AB 边上的中线 CM 所在的直线方程为 $2x-y-5=0$. AC边上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$. 则直线 BC 的方程为 (C)

A. $6x+5y-9=0$　B. $5x-6y+9=0$　C. $6x-5y-9=0$　D. $5x+6y-9=0$.



先研究高. 求出AC方程式.　$2x-y-5=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}(x-5)$

$\therefore K_{AC}=-2$.

已知点A.

$\therefore L_{AC}$　$y-1=-2(x-5)$

$\Downarrow$

$y=-2x+11$

再用AC. CM求出交点C坐标.　$\begin{cases} y=-2x+11 \\ y=2x-5 \end{cases}$　$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

$\therefore C(4,3)$.

设 $B(m,n)$　$\because$ B在直线BH上,

$\therefore n=\frac{1}{2}(m-5)$

$\therefore B[m, \frac{1}{2}(m-5)]$

$\because$ M为AB中点,

$\therefore$ M坐标　$\left(\frac{5+m}{2}, \frac{m-3}{4}\right)$

$\because$ M在直线MC上

$2\frac{m+5}{2}-\frac{m-3}{4}-5=0 \Longrightarrow m=-1$

$\therefore B(-1,-3)$

$\therefore$ 已知 $B(-1,-3)$　$C(4,3)$　用两点式

$y-3=\frac{3-(-3)}{4-(-1)}(x-4)$

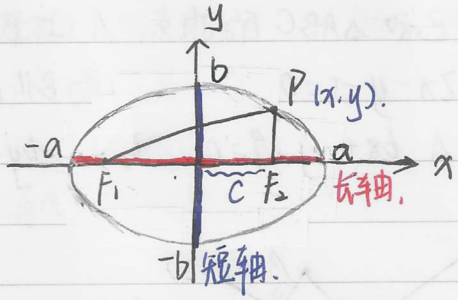
$5y-6x+9=0$.　选C.

3. 椭圆的定义与标准方程

$|PF_1|+|PF_2|=$ 定值 $=2a$.

F_1 与 F_2 为椭圆的焦点

设定值为 $2a$



推导：设 $P(x,y)$　$F_1(-c,0)$　$F_2(c,0)$

$|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

化简：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\underbrace{a^2-c^2}_{\text{设为 } b^2}}=1$

∴椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

当 x 取 0 时，$y=\pm b$.　　短轴长 $2b$.

当 y 取 0 时，$x=\pm a$　　长轴长 $2a$

椭圆上任一点到两焦点距离为定值 $2a$

注意点：$a^2=b^2+c^2$

焦距为 $|F_1F_2|=2c$

2023.甲卷

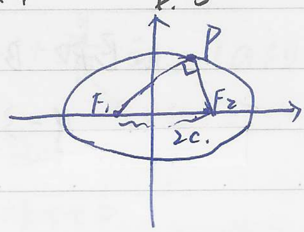
例题. 设 F_1, F_2 为椭圆 C: $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上. 若 $\vec{PF_1}\cdot\vec{PF_2}=0$

两向量垂直.

则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$ (B.)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 5

$a=\sqrt{5}$　$b=1$　$c=2$.



设 $PF_1=m$　$PF_2=n$.

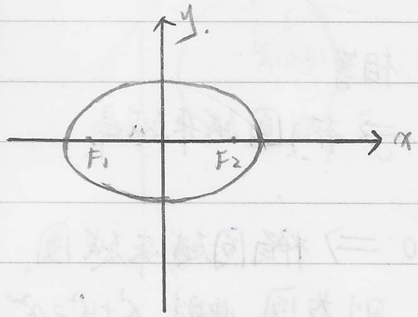
$m+n=2\sqrt{5}$.

求 mn.

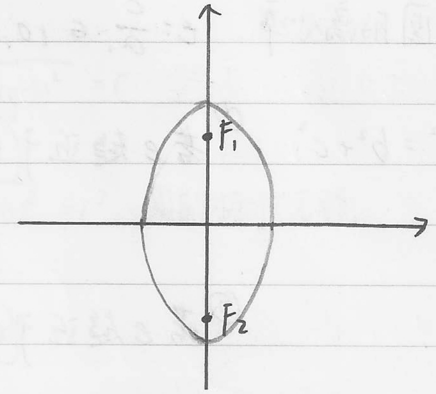
$2c=4$. ∴ $m^2+n^2=4^2$

∴ $mN=2$

注意焦点的位置.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

如何判断焦点位置. 小妙招.

先找 a^2. a 所在位置为长轴位置.

a^2 上的分子 (x^2/y^2) 即为焦点所在轴位置.

例: ① $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 焦点在 x 轴上.

$4 \to a^2$, $3 \to b^2$

② $x^2+3y^2=16$

$\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$

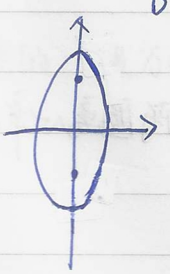
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$ 焦点在 x 轴上.

$16 \to a^2$, $\frac{16}{3} \to b^2$

③ 若椭圆 $\frac{x^2}{\underline{\underline{16}}}+\frac{y^2}{\underline{\underline{m}}}=1$ 的一个焦点坐标为 $(0,3)$, 则长轴长为 10 .

$16 \to b^2$, $m \to a^2$

$(0,3) \to$ 可知 $c=3$. 求 $2a$



$\because a^2=b^2+c^2$

$\therefore m=16+c^2$

$m=16+9$

$m=25$

$\therefore a^2=25$

$\therefore a=5$ $\therefore 2a=10$

椭圆的离心率　$e=\frac{c}{a}\in(0,1)$

$a^2=b^2+c^2$

① 若e趋近于1 ⟹ 则 a与c 趋近于相等
$\Downarrow$
b 趋近于0. ⟹ 椭圆越来越扁.

② 若e趋近于0 ⟹ 则c趋近于0. ⟹ 椭圆越来越圆.
当c=0时，则为圆. 此时 $x^2+y^2=a^2$

例: 已知椭圆的长轴长为短轴长的2倍. 则椭圆的离心率等于(D)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<法一>　$2a=2\cdot(2b)$

$\therefore a=2b.$

$a^2=b^2+c^2$　　$\therefore c^2=3b^2$　　$\therefore \frac{c^2}{a^2}=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

<法二> 代特殊值法　$a=2b$

设$b=1$　$a=2$ 则$c=\sqrt{3}$

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

小结: 求离心率 = 找关于 abc 的等式

椭圆离心率的计算

例: 若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 满足$2b=a+c$. 则该椭圆离心率e为(C)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

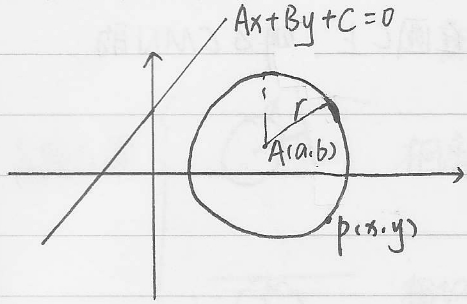
$b^2=a^2-c^2$

$4b^2=(a+c)^2$

$4(a^2-c^2)=a^2+c^2+2ac$　　$\therefore 3-2e-5e^2=0$

$\div a^2$　$3a^2-2ac-5c^2=0$

$3-2\cdot\frac{c}{a}-5\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2=0$



4. 圆的方程

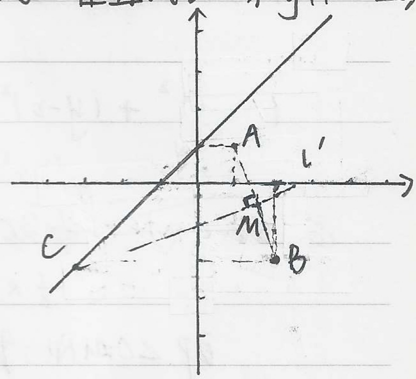
$|AP| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$

$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 圆的标准方程

r 半径.

(a,b) 圆心

例：已知圆心为C的圆经过点A(1,1)，B(2,-2)，且圆心C在直线l：$x-y+1=0$上，求圆C的标准方程.



设圆心 (a,b)

$k_{AB}=\frac{1-(-2)}{1-2}=-3 \quad \therefore k_{l'}=\frac{1}{3}$

$M\left(\frac{1+2}{2}, \frac{1-2}{2}\right)$ 即 $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore l': y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}x-1$

$\begin{cases} b=\frac{1}{3}a-1 \\ a-b+1=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$

$r=|CA|=\sqrt{(4^2+3^2)}=5$

$\therefore$ 标准方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$

圆的一般方程. $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$\Updownarrow$

$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$

半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

对于 D^2+E^2-4F $\begin{cases} <0 & \text{无意义. 无对应图象} \\ =0 & \text{点.} \\ >0 & \text{圆.} \end{cases}$

例：已知圆过点 $(4,6)$ $(-2,-2)$，$(5,5)$ 点 M. N 在圆 C 上，则 $\triangle CMN$ 的最大值为 $\underline{\frac{25}{2}}$.

解：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$$\begin{cases}16+36+4D+6E+F=0\\4+4-2D-2E+F=0\\25+25+5D+5E+F=0\end{cases}\qquad\begin{cases}D=-2\\E=-4\\F=-20\end{cases}$$

$(x^2-1)^2+(y-2)^2=25$　　圆心 $(1,2)$. $r=5$

$$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\cdot CN\cdot CM\cdot\sin\angle NCM$$
$$\leq\frac{1}{2}\times5\times5\times1=\frac{25}{2}$$

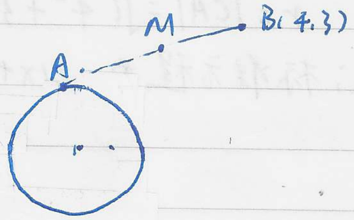
即 $\angle NCM=90^\circ$ 时. $S_{\triangle CMN\max}=\frac{25}{2}$

例：已知线段 AB 的端点 B 的坐标为 $(4,3)$，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程，并说明 M 的轨迹是什么图形.

$M(x,y)$　$A(x_0,y_0)$

$$\begin{cases}x=\frac{x_0+4}{2}\\y=\frac{y_0+3}{2}\end{cases}$$

$(x_0+1)^2+y_0^2=4$



代入

$$\begin{cases}2x-4=x_0\\2y-3=y_0\end{cases}$$

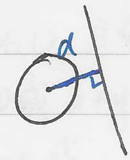
$\therefore(2x-3)^2+(2y-3)^2=4$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=1$

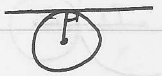
轨迹 $\therefore$ 是以 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 为圆心，1 为半径的圆.

5. 直线与圆的位置关系

直线与圆



相离 $d > r$ 联立思想 $\Delta < 0$



相切 $d = r$ $\Delta = 0$

相交 $d < r$ $\Delta > 0$

例：已知直线 $l: 3x + y - 6 = 0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.
请判断直线 l 与圆的位置关系，如果相交，求它们的交点坐标

1° $C: \quad x^2 + (y-1)^2 = 5$.

圆心为 $(0,1)$

$$d = \frac{|3 \times 0 + 1 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} < \sqrt{5} = r$$

$\therefore d < r$ 相交

2° $\begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases}$ $y = -3x + 6$

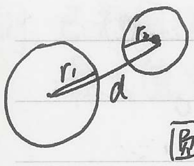
$\therefore x^2 + (3x-6)^2 + 2(3x-6) - 4 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$

$\therefore$ 交点 $(1, 3)$

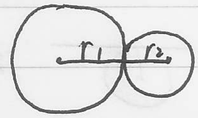
$(2, 0)$

6. 圆与圆位置关系

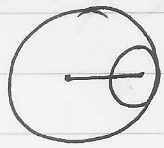


圆与圆

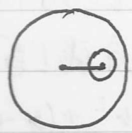
- $d > r_1 + r_2$ 相离
- $d = r_1 + r_2$ 相切 外切



- $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ 相交
- $d = r_1 - r_2$ 内切 ($r_1 > r_2$ 前提)



- $d < r_1 - r_2$ 内含



已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+8y-8=0$. 圆 C_2：$x^2+y^2+4x-4y-2=0$
试判断圆 C_1 与圆 C_2 的关系.

C_1：$(x+1)^2+(y+4)^2=5^2$　　$(-1,-4)$

C_2：$(x+2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{10})^2$　　$(-2,2)$

$d=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$　　$r_1+r_2=5+\sqrt{10}$

$\therefore d < r_1+r_2$

$\because r_1 - r_2 < d$

$\therefore r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$　$\therefore$ 为相交.

7. 直线与圆习题课

例1. 过点 $A(4,1)$，且在两坐标轴上截距相等的直线方程是（ B ）

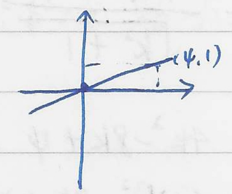
A. $4x-y=0$ 或 $x+y-5=0$　　B. $x-4y=0$ 或 $x+y-5=0$

C. $x-4y=0$ 或 $x-y+3=0$　　D. $x+y-5=0$

1° $ab\neq0$　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$　$\therefore \frac{4}{a}+\frac{1}{a}=1$　$\therefore \frac{5}{a}=1$

$a=5$

2° $ab=0$　$a=b=0$



$y=\frac{1}{4}x$　$\therefore x-4y=0$　$\therefore x+y=5$

例2：已知 $P(m,n)$ 是函数 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 图象上的动点，则 $|4m+3n-21|$ 的最小值是（ C ）

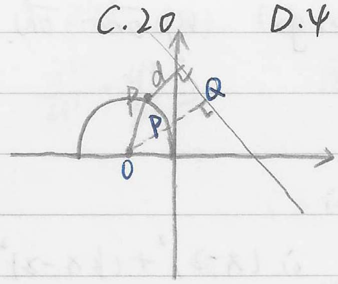
$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

A. 25　　B. 21　　C. 20　　D. 4

$y^2=-x^2-2x$　$(y\geq0)$

$y^2+x^2+2x=0$

$y^2+(x+1)^2=1$　$(y\geq0)$



若最小，即PQ最小.

$\therefore PQ=OQ-OP$

$=5-1$

$=4$

$P(m,n)\longrightarrow l: 4x+3y-21=0$ 的距离.

$d=\frac{t}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{t}{5}$

$\therefore d_{min}=4.$

$\therefore t_{min}=5d_{min}$

$\therefore d_{min}=4$

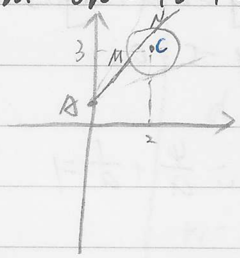
$\therefore t_{min}=20$

例3：已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于点 M、N 两点。

(1) 求 k 的取值范围

(2) 若 $\vec{OM}\cdot\vec{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$

(1) 解：



$C(2,3)$

$y=kx+1 \quad \therefore kx-y+1=0$

$$d=\frac{|2k-3+1|}{\sqrt{k^2+1}}<1$$

即 $4k^2-8k+4<1+k^2$

$3k^2-8k+3<0$

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

(2) 解：$M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$ 则 $\vec{OM}\cdot\vec{ON}=x_1x_2+y_1y_2=12$

$$\begin{cases} y=kx+1 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=1 \end{cases}$$

$\therefore (x-2)^2+(kx-2)^2=1$ 即 $(k^2+1)x^2-(4+4k)x+7=0$

代入

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4+4k}{k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{7}{k^2+1} \end{cases}$$

$y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)$

$=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$

$$=\frac{7k^2+4k^2+4k+k^2+1}{k^2+1}$$

$$=\frac{12k^2+4k+1}{k^2+1}$$

$$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\frac{12k^2+4k+8}{k^2+1}=12$$

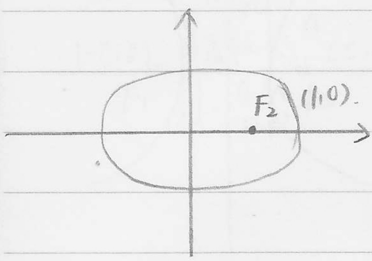
$\therefore k=1$ $\quad \therefore y=x+1$ (易知该直线过圆心 $(2,3)$)

$\therefore MN=2$ (直径)

8. 椭圆的习题课.

例：已知椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($b>0$) 的一个焦点为 (1,0). 则 $b=$ (C)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$



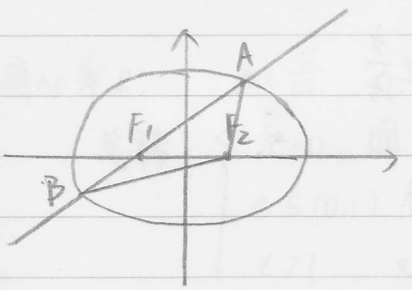
即已知：$c=1$　$a^2=4$.

$\because a^2=b^2+c^2$

$\therefore b^2=3$　$b=\sqrt{3}$

例：已知椭圆C的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过点 F_1 的直线与C交于 A.B. 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8. 则椭圆C的标准方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　B. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$



已知：$c=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

周长 $=AB+BF_2+AF_2$

$=AF_1+BF_1+AF_2+BF_2$

$=(AF_1+AF_2)+(BF_1+BF_2)$

$=4a$

$\therefore a=2$

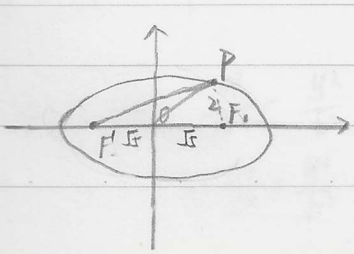
$\therefore b^2=a^2-c^2=3$

$\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

补全另一个焦点.

例：已知椭圆的中心为座标原点O，$F(\sqrt{5},0)$ 是椭圆C的右焦点. P是椭圆C上一点，满足 $|OP|=|OF|$，且 $|PF|=2$. 则椭圆的离心率为 (A.)

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$



求 $e=\frac{c}{a}$

已知 $c=\sqrt{5}$

$|PF'|+|PF|=2a$

$\therefore PF'=2a-2$

$\because |OH|=|OP|=|OF'|$

$\therefore \triangle PF_2F_1$ 为直角三角形

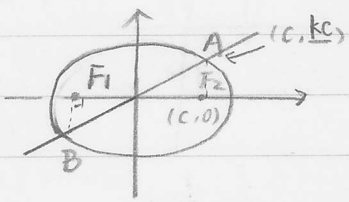
$\therefore PF'=4$

$\therefore a=3$

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

例：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，直线 $y=kx$ 与该椭圆交于A、B两点，分别过 A、B 向x轴作垂线，若垂足恰为椭圆的两个焦点，则k等于（A.）

A. $\pm\frac{3}{2}$　　B. $\pm\frac{2}{3}$　　C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. ± 2



代入A点坐标，

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{k^2c^2}{b^2}=1$$

$\because e=\frac{1}{2}$ $\therefore a=2c$

$a^2=b^2+c^2$

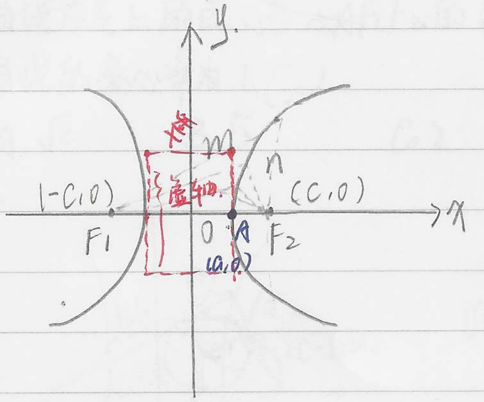
$b^2=3c^2$

$$\therefore \frac{c^2}{4c^2}+\frac{k^2c^2}{3c^2}=1$$

$$\therefore \frac{1}{4}+\frac{k^2}{3}=1$$

$k^2=\frac{9}{4}$　　$k=\pm\frac{3}{2}$

9. 双曲线的定义与标准方程



$|m-n|=2a$.

标准方程式：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$

$c^2-a^2=b^2$　　∴ c最大.

当F_1F_2在x轴上时，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

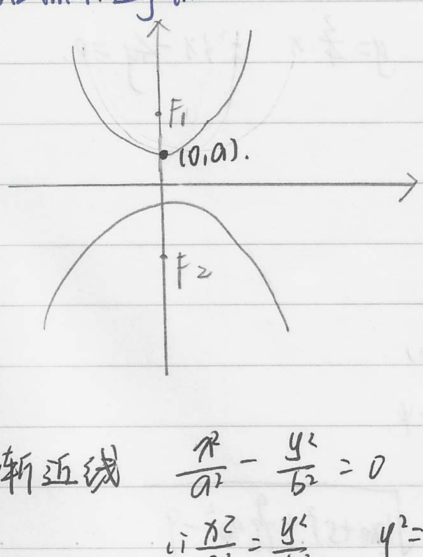
a表示实半轴长.

b表示虚半轴长.

离心率e.　$e=\frac{c}{a}$　$(1,+\infty)$

总结 $\begin{cases} e=0 & 圆 \\ e\in(0,1) & 椭圆 \\ e>1 & 双曲线 \end{cases}$

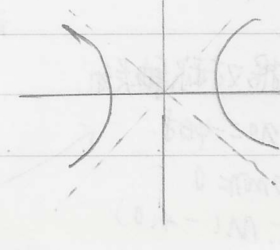
若焦点在y轴.



$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$.

渐近线　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$　　即.



$\therefore \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$　$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2$　$\therefore y=\pm\frac{b}{a}x$.

10. 双曲线习题课

① 例：双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$a^2=4 \quad b^2=3$

$c^2=7.$

$\therefore c=\sqrt{7} \quad a=2$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

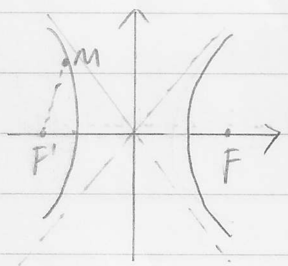
② 例：已知双曲线C的方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，则下列说法错误的是（　　）

A. 双曲线C的实轴长为8 $=2a$. ✓

B. 双曲线C的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$ ✓

C. 双曲线C的焦点到渐近线的距离为3 ✓

D. 双曲线C上的点到焦点距离的最小值为 $\frac{9}{4}$.



A.

$a^2=16. \quad \therefore a=4.$

$b^2=9 \quad b=3.$

$c^2=a^2+b^2=25 \quad c=5.$

B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0$

$y^2=\frac{9}{16}x^2$

$y=\pm\frac{3}{4}x.$

C. 焦点为 $(5,0)$ $(-5,0)$.

$\because d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\quad y=\frac{3}{4}x \quad \therefore 3x-4y=0.$

$\therefore d=\frac{|3\times 5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

D. 设双曲线上点为 (x_0, y_0).

满足 $\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1$ $x_0\geq 4$ 或 $x_0\leq -4$.

$\therefore |MF'|=\sqrt{(x_0+5)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+5)^2+\frac{9}{16}x_0^2-9}$

$=\sqrt{\frac{25}{16}x_0^2+10x_0+16}$

对称轴 $x=-\frac{16}{5}$

根据对称轴关系.

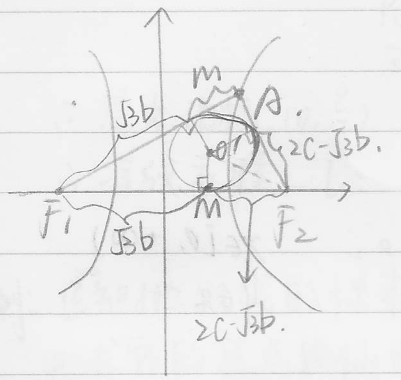
当 $x_0=-4$ 时.

$y_{0\min}=0$

$\therefore M(-4,0)$

例：已知F_1、F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$的左、右焦点，点A为双曲线右支上的点，若$\triangle AF_1F_2$的内切圆与x轴切于点M，且$|F_1M|=\sqrt{3}b$，则双曲线的离心率为（C）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$



$AF_1-AF_2=2a$.

$(\sqrt{3}b+m)-(m+2c-\sqrt{3}b)=2a$

$2\sqrt{3}b-2c=2a$

$\sqrt{3}b=a+c$

$3b^2=(a+c)^2$

$3(c^2-a^2)=a^2+c^2+2ac$.

$2c^2-2ac-4a^2=0$　　同时÷a^2

$\frac{c^2}{a^2}-\frac{c}{a}-2=0$.

$\therefore (\frac{c}{a}-2)(\frac{c}{a}+1)=0$

$\therefore \frac{c}{a}=2$　$\frac{c}{a}=-1$（舍去）.

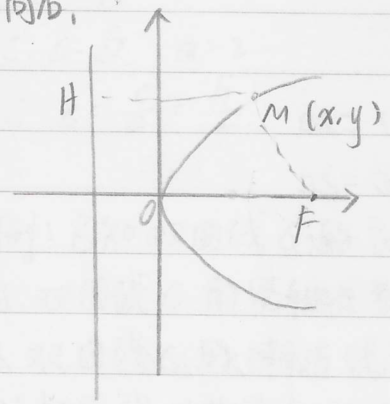
综上 $\frac{c}{a}=2$

11. 抛物线的定义

$$\begin{cases} 0<e<1 & \text{椭圆} \\ e>1 & \text{双曲线} \\ e=1 & \text{抛物线（不一定是函数.} \end{cases}$$

①

开口向右.



准线方程 $x=-\frac{p}{2}$

$|MF|^2=|MH|^2$

$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$

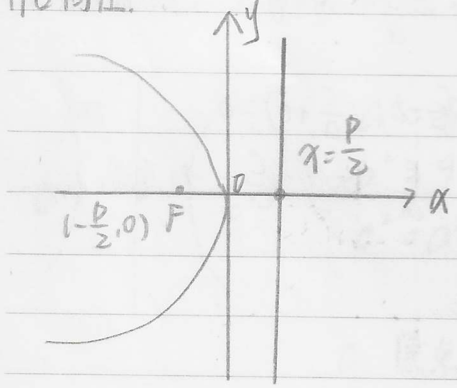
$y^2=2px \quad (p>0)$

$x\in[0,+\infty)$

$y\in R.$

②

开口向左.



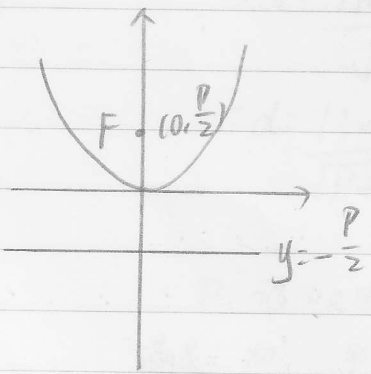
$y^2=-2px. \quad (p>0)$

$x\in(-\infty,0]$

$y\in R.$

③

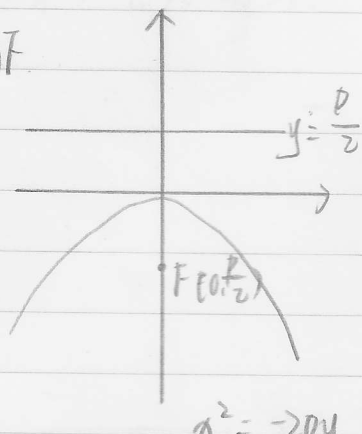
开口向上



$x^2=2py$

④.

开口向下



$x^2=-2py$

抛物线离心率为1.

例：已知抛物线方程为 $x^2=12y$. 求抛物线的焦点坐标和准线方程.

$\because x^2=12y$ $\quad x^2=2py$

$\therefore$ 开口向上. $\quad \therefore 2p=12$

$p=6$.

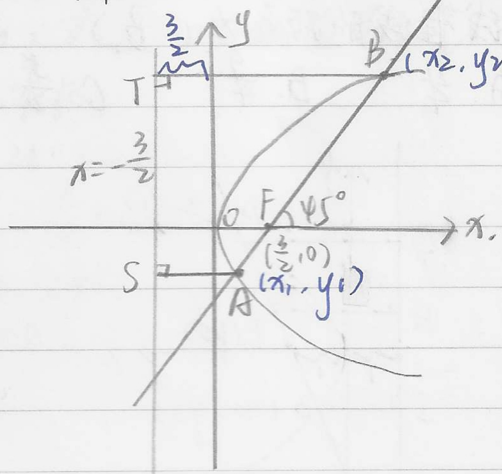
$\therefore$ 焦点坐标 $(0,\frac{p}{2})$ 为：$F(0,3)$

$\therefore$ 准线方程 l: $x=-\frac{p}{2}$ 即 $x=-3$.

例：已知抛物线的标准方程是 $y^2=6x$.

(1) 求它的焦点坐标和准线方程

(2) 直线 l 过已知抛物线 C 的焦点且倾斜角为 45°，且与抛物线的交点为 A.B. 求线段 AB 的长度。



解：(1). 开口向右，[可判断].

$y^2=2px$.

$\therefore p=3$.

$\therefore$ 准线方程 $x=-\frac{3}{2}$

焦点坐标 $F(\frac{3}{2},0)$

(2) 解：$AB=BF+AF$

$=BT+AS$.

$=(x_2+\frac{3}{2})+(x_1+\frac{3}{2})$

$=\underline{x_1+x_2}+3 \quad =12$

$\begin{cases} y=x-\frac{3}{2} & \text{直线} \\ y^2=6x & \text{抛物线} \end{cases} \Longrightarrow (x-\frac{3}{2})^2=6x$.

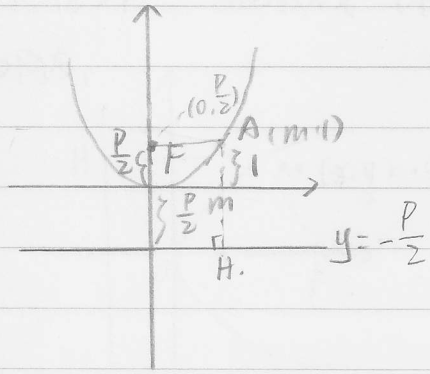
$x^2-9x+\frac{9}{4}=0$. [韦达定理].

$\underline{x_1+x_2=9}$.

12. 抛物线的习题课 $\left\{\begin{array}{l}\text{从定义出发.} \\ \text{找准线.}\end{array}\right.$

例：已知抛物线 $x^2=2py$ 上的一点 $A(m,1)$ 到其焦点的距离为 p. 则 p 为（A）

A. 2　　B. −2　　C. 4　　D. −4.



开口向上

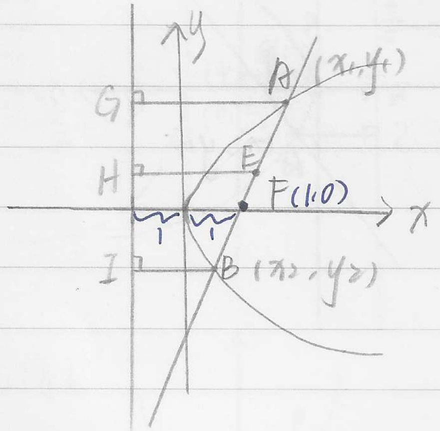
$AF=AH$. 抛物线定义.

$\therefore 1+\frac{p}{2}=p$.

$p=2$.

例：已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与抛物线 C 的两个交点分别为 A. B，且满足 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$E$ 为 AB 中点，则点 E 到抛物线准线的距离为（B.）

A. $\frac{11}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$



EH 为梯形中位线

$EH=\frac{1}{2}(AG+BI)$

$=\frac{x_2+1+x_1+1}{2}=\frac{9}{4}$

$\because y^2=4x$

$=2px$

$\therefore p=2 \quad \frac{p}{2}=1$.

$\because \overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$

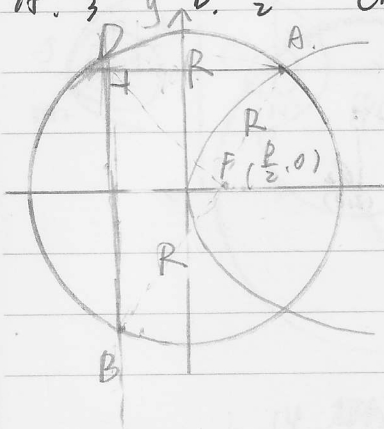
$\therefore (1-x_1,-y_1)=2(x_2-1,y_2)$

$\left\{\begin{array}{l}1-x_1=2x_2-2 \\ -y_1=2y_2\end{array}\right. \Longrightarrow y_1^2=4y_2^2$

$\left\{\begin{array}{l}x_1=2 \\ x_2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

例：已知抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F．A为C上一点且在第一象限．以F为圆心，FA为半径的圆交C的准线于B．D两点，且A．F．B三点共线，则直线AF的斜率为（D）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$.



AB直径．$\angle ADB=90^\circ$

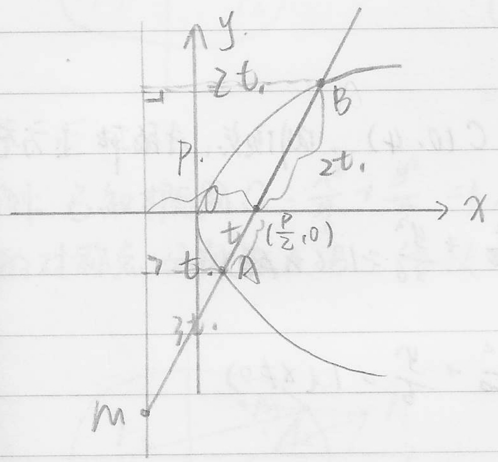
∴ $AD=AF=R$

∴ $\angle AFx=60^\circ$

∴ $k=\tan\theta=\sqrt{3}$

例：已知点F为抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，过点F的直线l交C于A，B两点，与C的准线交于M，若$\vec{AB}+\vec{AM}=\vec{0}$，则$|AB|$的值等于（D）

A. $\frac{3}{4}p$　B. $2p$　C. $3p$　D. $\frac{9}{4}p$.



$AB=2t+t=3t$.

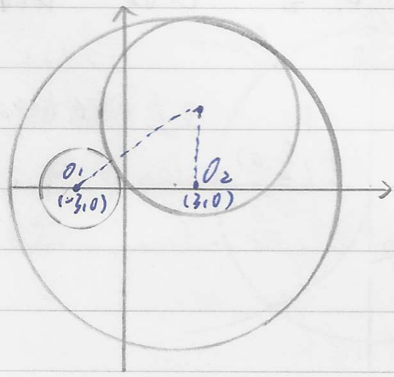
$P=\frac{4}{3}t$.

∴ $t=\frac{3}{4}P$

∴ $AB=3t=\frac{9}{4}P$.

13. 椭圆的第一定义与方程.

例：如图，一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，求动圆圆心 M 的轨迹方程，并说明它是什么样的曲线.



解：$x^2+y^2+6x+5=0$

$\Rightarrow (x+3)^2+y^2=2^2$

$x^2+y^2-6x-91=0$

$(x-3)^2+y^2=100$

$|MO_1|=r+2$

$|MO_2|=10-r$

$|MO_1|+|MO_2|=12=2a$

$a=6.$

$c=3$

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 椭圆

例：已知 $\triangle ABC$ 周长为 20，且顶点 $B(0,-4)$ $C(0,4)$，则顶点 A 的轨迹方程是（ B ）

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1 \quad (x\neq0)$

B. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1 \quad (x\neq0)$

C. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{20}=1 \quad (x\neq0)$

D. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{6}=1 \quad (x\neq0)$

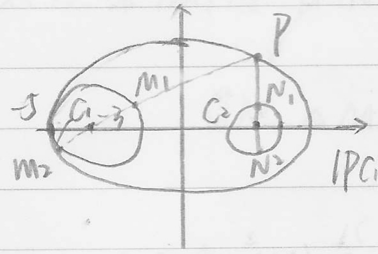
$2a=12 \quad a=6.$

$2c=8 \quad c=4$

例：点P为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一点，M、N分别是圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的动点，则 $PM+PN$ 的取值范围是 [7, 13].

$|PM_1| \le |PM| \le |PM_2|$

$|PN_1| \le |PN| \le |PN_2|$

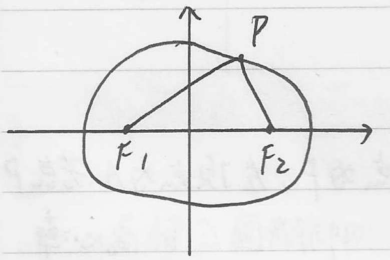


$|PC_1|+|PC_2|+3 \ge |PM|+|PN| \ge |PC_1|+|PC_2|-3$

C_1 与 C_2 为两个焦点

$\therefore \quad 7 \le |PM|+|PN| \le 13$

14. 椭圆中的焦点三角形问题



① $|PF_1|+|PF_2|=2a$.

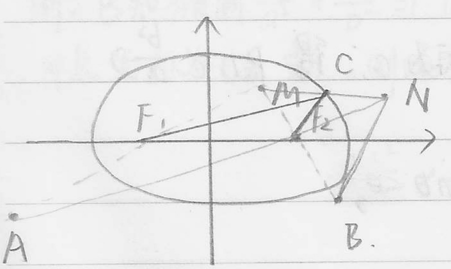
② 中位线

③ 勾股定理

④ 正、余弦定理

例：已知椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A、B，线段 MN 的中点在 C 上，则 $|AN|+|BN|=$ 12.

$a=3$.



方法：中位线

$\triangle MAN$ 与 $\triangle MBN$

两条中位线

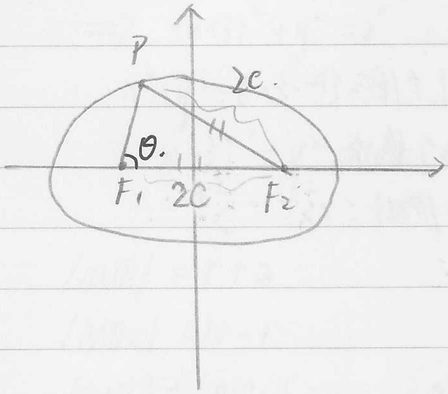
$\therefore |AN|+|BN| = 2|F_1C|+2|F_2C|$

$= 2\times 2a$

$=4a$

$=12$

例：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左.右焦点分别为 F_1, F_2. P是椭圆上的一点，$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形. 若 $0°<\angle PF_1F_2<60°$. 则该椭圆的离心率取值范围为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$. $e=\frac{c}{a}$



$PF_1=2a-2c$

余弦定理

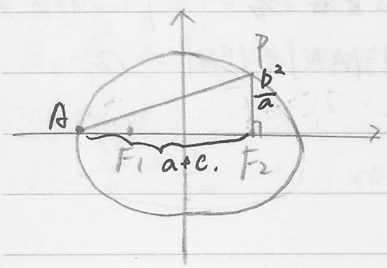
$$\cos\theta=\frac{(2c)^2+(2a-2c)^2-(2c)^2}{2c\cdot(2a-2c)}=\frac{a-c}{2c}\in(\frac{1}{2},1)$$

$$\frac{1-\frac{c}{a}}{2\frac{c}{a}}=\frac{1-e}{2e}\in(\frac{1}{2},1)$$

$$\therefore \frac{1}{3}<e<\frac{1}{2}$$

例：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为F，左顶点为A. 若点P为椭圆C上的点，$PF\perp x$轴，且 $\sin\angle PAF<\frac{\sqrt{10}}{10}$，则椭圆C的离心率取值范围为 $(\frac{2}{3},1)$

$e=\frac{c}{a}$.



$\sin\theta=\frac{PF_2}{AP}$

P的座标. 代入横座标为c. 得 $P(c,\frac{b^2}{a})$

$\sin\theta<\frac{\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow 0<\tan\theta<\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{\frac{b^2}{a}}{a+c}<\frac{1}{3}$ $\qquad\therefore \frac{2}{3}<e<1$

$\therefore \frac{a^2-c^2}{a(a+c)}<\frac{1}{3}$

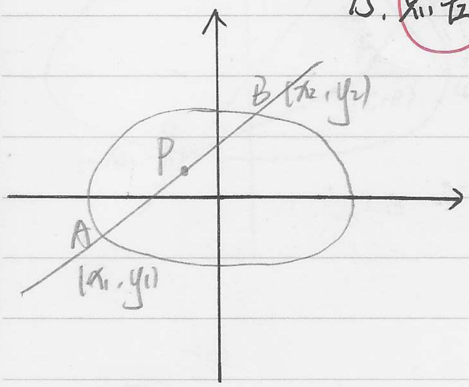
$\therefore 3a^2-3c^2<a^2+ac$ 同时 $\div a^2$

$\Rightarrow 3e^2+c-2>0$ $\quad\therefore e>\frac{2}{3}$ 或 $e<-1$ (舍)

例：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为F_1、F_2，M为椭圆上的一点，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$. 线段$MF_2$的延长线交椭圆C于点N. 若$|MF_1|$、$|MN|$、$|NF_1|$成等差数列. 则椭圆C的离心率为

得知 $\triangle MF_1F_2$为直角三角形

15. 点差法.



AB为弦. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

P为弦上中点

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 & ① \\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 & ② \end{cases}$$

① - ② $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$

$k_{OP}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_P}{y_P}=k_{AB}.$$

例：已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 过点 $(0, \frac{5}{8})$ 的直线交椭圆C所得的弦的中点坐标为$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，则该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=k \qquad k=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore -\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$$

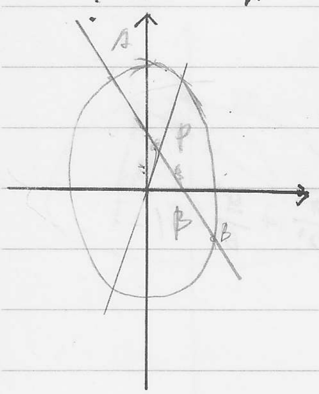
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=1 \quad a=2$ $\qquad \therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore c=\sqrt{3}$

例：椭圆 $mx^2+ny^2=1$ $(m>0, n>0, m\neq n)$ 与直线 $y=-x+1$ 交于A、B两点，过原点与线段AB中点的直线斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\frac{n}{m}$ 的值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解：$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$



$\frac{y_P-0}{x_P-0}=k_{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_P}{y_P}=k_{AB}=-1$

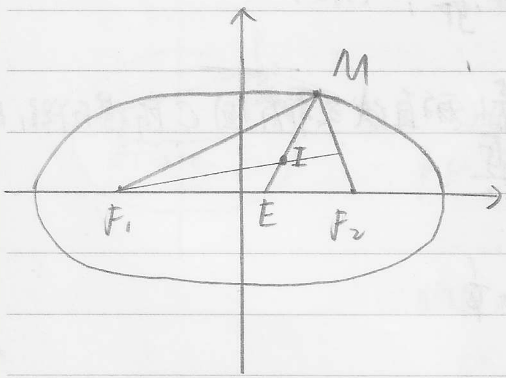
$-\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=-1$

$\frac{n}{m}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

16. 椭圆的进阶

例：已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，M为椭圆上异于长轴端点的一点，$\triangle MF_1F_2$ 的内心为I，直线MI交x轴于点E，若 $\frac{|MI|}{|IE|}=2$，则椭圆C的离心率是（B.）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$



$\frac{|F_1M|}{|F_1E|}=\frac{|MI|}{|IE|}=2$

$\frac{|MF_2|}{|EF_2|}=\frac{|MI|}{|IE|}=2$

$|F_1M|+|F_2M|=2a$

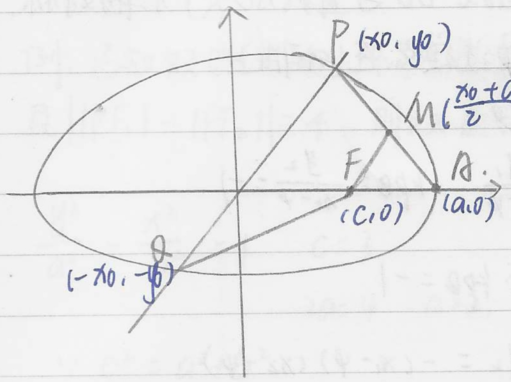
$|F_1E|+|F_2E|=2c.$

$\therefore 2c\cdot 2=2a$

$\therefore a=2c.$　　$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

例：在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A、F 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右顶点和右焦点，过坐标原点 O 的直线交椭圆 C 于 P、Q 两点，线段 AP 的中点为 M。若 Q、F、M 三点共线，则椭圆 C 的离心率为（ A ）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{3}$



$k_{FM}=k_{QF}$

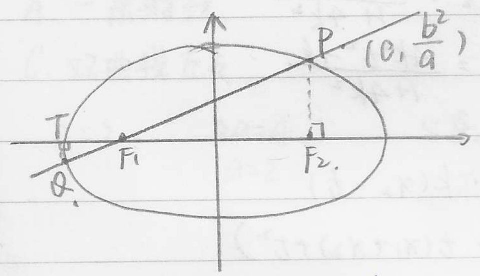
$$\frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0+a}{2}-c}=\frac{y_0}{c+x_0}$$

$c+x_0=x_0+a-2c$

$a=3c.$

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$

例：已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 上一点且 $PF_2\perp x$ 轴，直线 PF_1 与 C 的另一个交点为 Q，若 $|PF_1|=4|F_1Q|$，则 C 的离心率为 $\underline{\ \frac{\sqrt{21}}{7}\ }$.



相似法.

$\because P(c,\frac{b^2}{a})$

$\therefore Q(-\frac{3}{2}c,-\frac{b^2}{4a})$

$\because$ Q 在椭圆上

$$\therefore \frac{(-\frac{3}{2}c)^2}{a^2}+\frac{(-\frac{b^2}{4a})^2}{b^2}=1$$

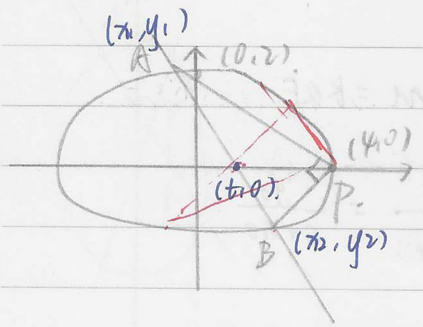
化简：$\frac{9}{4}e^2+\frac{1}{16}(1-e^2)=1$

$e^2=\frac{3}{7}$

$e=\frac{\sqrt{21}}{7}$

例：已知椭圆E：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，P为椭圆E的右顶点，直线l交E于A.B两点，且PA⊥PB，则l恒过除P点以外的定点 $(\frac{12}{5},0)$.

$a=4$. $b=2$.



法：∵椭圆是对称图形

∴作直线CD与直线AB关于x轴对称.

则恒过定点在x轴上.

设定点为$(t,0)$

$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1-4}$　$k_{PB}=\frac{y_2}{x_2-4}=-1$

$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$

$\therefore y_1y_2=-(x_1-4)(x_2-4)$

设AB：$y=k(x-t)$

1° k不存在 略

2° k存在. $\begin{cases} y=k(x-t) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 再代入

$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{8k^2t}{1+4k^2} \\ x_1x_2=\frac{4k^2t^2-16}{1+4k^2} \end{cases}$

$y_1y_2=k(x_1-t)\cdot k(x_2-t)$

$=k^2[x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2]$

$=-(x_1-4)(x_2-4)$

$(1+k^2)x_1x_2-(k^2t+4)(x_1+x_2)+k^2t^2+16=0$.

$1+k^2\cdot\frac{4k^2t^2-16}{1+4k^2}-(k^2t+4)\frac{8k^2t}{1+4k^2}+k^2t^2+16=0$.

$4k^2t^2-16+4k^4t^2-16k^2-8k^4t^2-32k^2t+k^2t^2+4k^4t^2+16+64k^2=0$

$5k^2t^2-32k^2t+48k^2=0$.

$5t^2-32t+48=0$

$(t-4)(5t-12)=0$.

$t=4$ 或 $t=\frac{12}{5}$

∵除P点外

∴ $t\neq4$

∴ $t=\frac{12}{5}$

∴另一定点为$(\frac{12}{5},0)$

17. 双曲线方程求法

$|m-n|=2a$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

例：已知双曲线的上下焦点分别为 $F_1(0,-3)$ $F_2(0,3)$，P是双曲线上一点且 $||PF_1|-|PF_2||=4$，则双曲线的标准方程为 $\underline{\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1}$.

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$　$c=3$.

$2a=4$　$a=2$.

$\because c^2=a^2+b^2$

$\therefore b^2=5$

$\therefore C: \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$

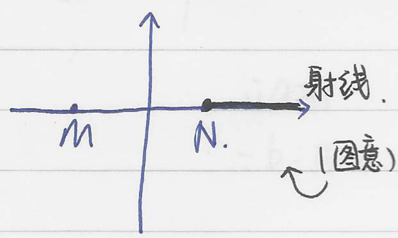
例：已知 $M(-2,0)$. $N(2,0)$. $|PM|-|PN|=4$. 则动点P的轨迹为（　）

A. 一条射线　　B. 双曲线

C. 双曲线左支　　D. 双曲线右支.

$c=2$　$2a=4$ $a=2$　$\because$ 在双曲线中，C.一定大于a.

$\therefore$ 不是双曲线，排除 B.C.D.



$4k^2=0$

例：已知双曲线的一个焦点为(0,5)，且与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的渐近线相同，则双曲线C的标准方程为：$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$

$c=5$

$\frac{x^2}{4}-y^2=0$

$x^2=4y^2$

$y=\pm\frac{1}{2}x$.

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

渐近线方程 $\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{b^2}$

$y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{1}{2}x$

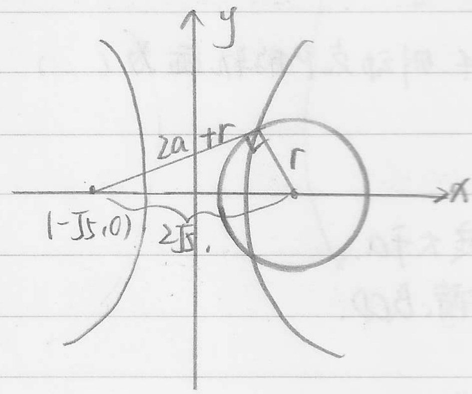
$\therefore b=2a$.

$\because c=5 \quad c^2=a^2+b^2$

$\therefore a=\sqrt{5} \quad b=2\sqrt{5}$

$\therefore$ C的方程为 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$

例：过双曲线E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$的左焦点$(-\sqrt{5},0)$，作圆$(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$的切线，切点在双曲线E上，求E的离心率.



勾股定理 $r^2+(2a+r)^2=(2\sqrt{5})^2$

且$r=2$

$\therefore a=1$

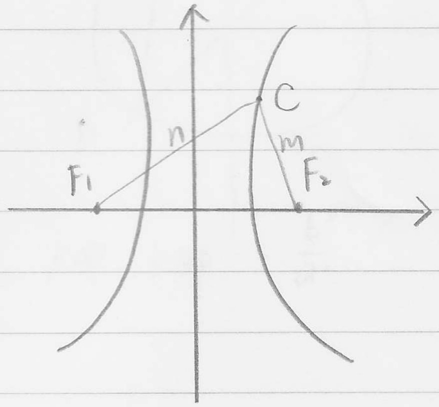
$\because c=\sqrt{5}$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$

18. 双曲线与几何小题.

例：双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在 C 上，且 $|PF_1| + |PF_2| = 3b$，$|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$，则双曲线的离心率为（B）

A. $\frac{4}{3}$　B. $\frac{5}{3}$　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　D. $\sqrt{10}$.



$$\begin{cases} n-m=2a \\ n+m=3b \\ mn=\frac{9}{4}ab \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} n=a+\frac{3}{2}b \\ m=\frac{3}{2}b-a \end{cases}$$

代入 得. $(4a-3b)(a+3b)=0$

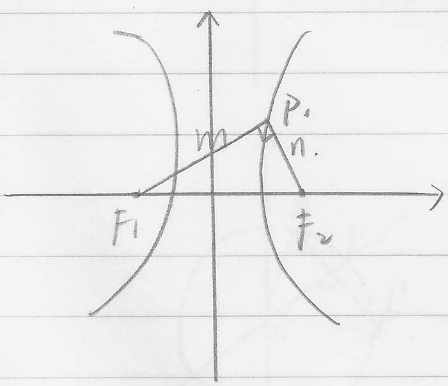
$\therefore b=\frac{4}{3}a$.

$\therefore c^2 = a^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = \frac{25}{9}a^2$　　$\therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{25}{9}$

$\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ (负舍)

例：设 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0, b>0)$ 的左、右焦点，P 为双曲线右支上一点，若 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$，$c=2$，$S_{\triangle PF_1F_2}=3$. 则双曲线两条渐近线的夹角为（D.）

A. $\frac{\pi}{5}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{6}$　D. $\frac{\pi}{3}$



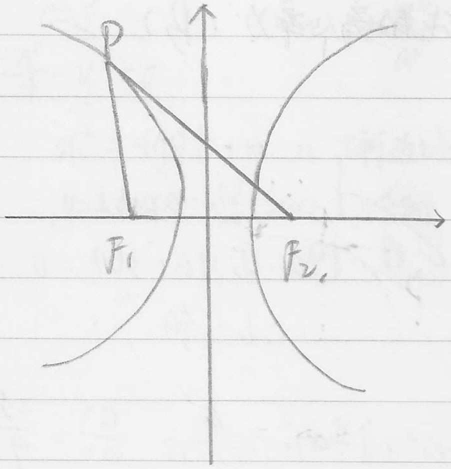
$$\begin{cases} 4=c^2=a^2+b^2 \\ \frac{1}{2}mn=3 \quad mn=6 \\ m^2+n^2=4^2=16 \end{cases} \quad \begin{cases} (m-n)^2=4 \\ m-n=2 \end{cases}$$

$\therefore a=1$

$\therefore b=\sqrt{3}$

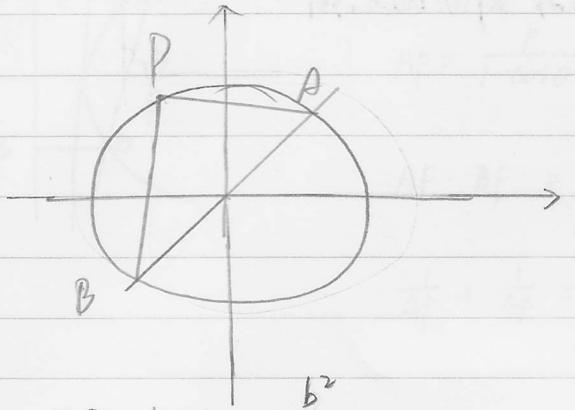
$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\sqrt{3}x$

例：双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 是 E 左支上一点，且 $|PF_1|=|F_1F_2|$，直线 PF_2 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，则 E 的离心率为______.

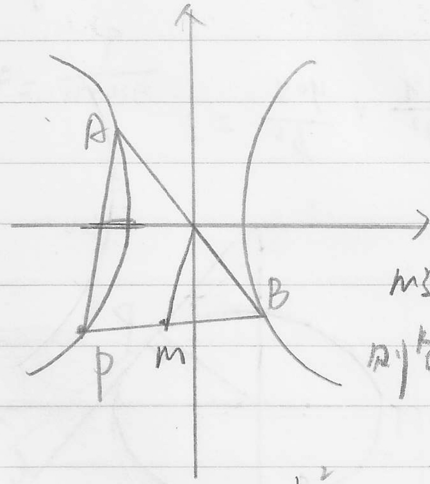


AB为过O的点.　　AB中心对称.

椭圆.



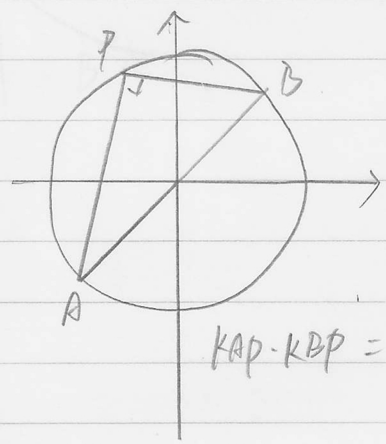
$k_{AP}\ k_{BP} = -\frac{b^2}{a^2}$



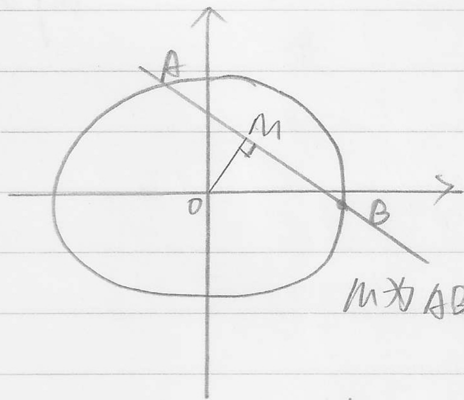
M过BP中点

则 $k_{OM} \cdot k_{BP} = \frac{b^2}{a^2}$

$k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{b^2}{a^2}$

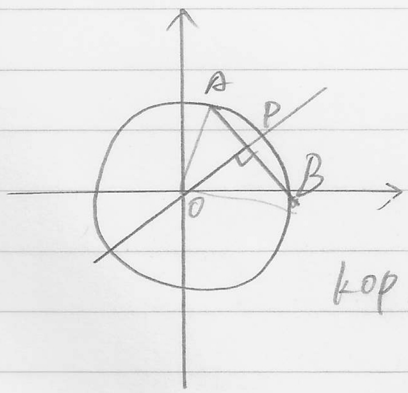


$k_{AP} \cdot k_{BP} = -1 = -\frac{b^2}{a^2}$



M为AB中点

$k_{OM}\ k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$



$k_{OP}\ k_{AB} = -1$

设 $A(x_1, y_1)$　$B(-x_1, -y_1)$　$P(x_0, y_0)$.

$k_{AP} k_{BP} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}$

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 & ① \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 & ② \end{cases}$$

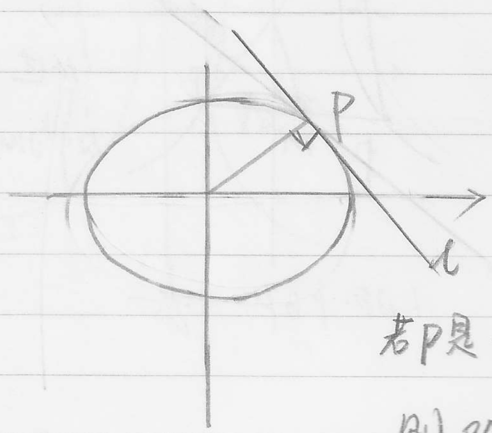
由 ①-② 得 $\frac{x_0^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_0^2 - y_1^2}{b^2} = 0$

$\therefore \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2}$

$x_0 x + y_0 y = r^2$ $P(x_0, y_0)$ 在上 则为切线

在外 则为切点弦

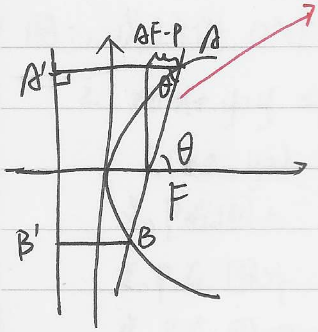
$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$



若P是切点、

则 $k_{ON} \cdot k_l = -\frac{b^2}{a^2}$

$\frac{AF-P}{AF} = \cos\theta.$ $AF = \frac{P}{1-\cos\theta}$

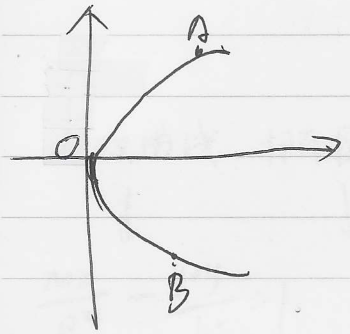


抛物线 焦点弦.

$AF = \frac{P}{1-\cos\theta}$ $BF = \frac{P}{1+\cos\theta}$

$AF \cdot BF = \frac{P^2}{\sin^2\theta}$ 以

$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{P}$



OA⊥OB

则恒过定点 (2p, 0).

圆：1. 成立条件 $D^2+E^2-4F>0$.

2. $x_0x+y_0y=r^2$

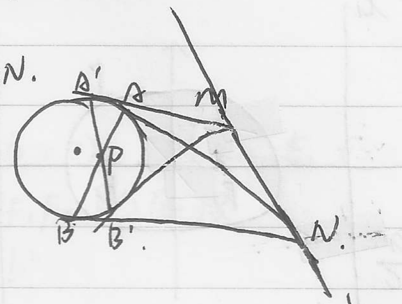
$P(x_0, y_0)$.

点P在圆上，则表示过P关于圆的切线

点P在圆外，则表示切点弦所在直线

点P在圆内，则表示

直线MN.



双曲线，椭圆一样.

$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

抛物线，例 $y^2=2px$.

则表示为 $y_0y=p(x_0+x)$

3. 例：[1] $x^2+y^2-4x+1=0$. 求 $x-y$ 取值范围

① 三角换元

② 几何意义 令 $x-y=t$.

求t的范围

[2] 求 $\frac{y}{x}$ 取值范围，即求斜率.

[3] $x^2+y^2+2x+2y$ 的取值范围.

三角换元

到(-1,-1)距离的平方

$(x+1)^2+(y+1)^2-2$

(几何意义).

直线：

$M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$.

∴ MN 垂直平分线方程：

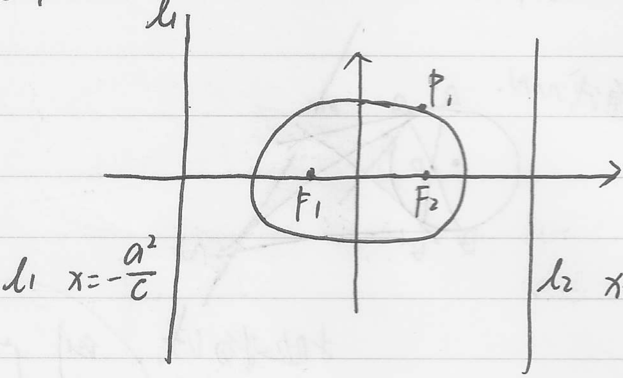
$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$

若已知圆方程，AB为任意一条直径，可联想三角换元。

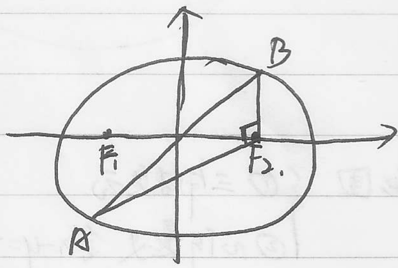
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$A(a+\cos\theta,\ b+\sin\theta)\quad B(a-\cos\theta,\ b-\sin\theta)$.

椭圆与准线.



$$\frac{PF_1}{d_{P-l_1}}=\frac{PF_2}{d_{P-l_2}}=e.$$



已知 $AF_2\perp BF_2$. $\angle BAF_2=\theta$.

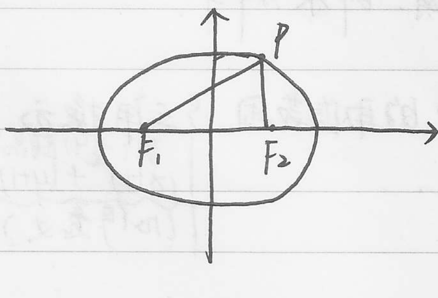
求 e.

$AB=2OA=2OF_2=2c$

$\therefore\ 2c(\sin\theta+\cos\theta)=2a$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$\therefore\theta$越大，$\tan\frac{\theta}{2}$越大。



$\theta\in(0,\pi)\quad\frac{\theta}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$. $\because\tan\theta$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调增

$\angle F_1PF_2$最大时，即P与短轴顶点重合时。

$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=2c\cdot\frac{1}{2}|y_P|$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c|y_P|}{b^2}$

$\because\frac{c}{b^2}$恒定

$\therefore$当$|y_P|max$时，$\tan\frac{\theta}{2}max$，θmax.

$\therefore$当$|y_P|=b$时，$\angle F_1PF_2 max$.

注意点：一般方程还是标准方程。

已知椭圆过2点，求椭圆方程。

设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$ $(m\neq n,\ m>0,\ n>0)$.

代入两点，求出 m、n.

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 焦点 F_1 F_2.

已知 $\angle F_1PF_2=\theta$ 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积

$S_{\triangle F_1PF_2}=\tan\frac{\theta}{2}b^2$.

推导方法. 一次正弦定理

一次余弦定理.

注意点：距离、长度. 带绝对值.

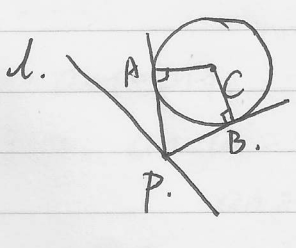
椭圆定义法表示. 例如 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$.

表示椭圆. 化简为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

截距问题. ① 截距均为0 两种考虑.

② 截距均不为0.

例：



已知圆C 标准方程式.

l 方程. P 为 l 上一点 引两条切线

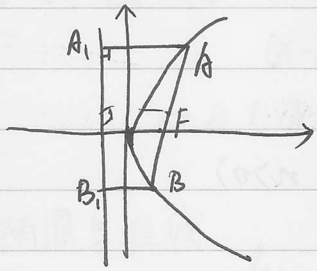
求AB是否过定点.

$PA^2=PC^2-r^2$

① 以P为圆心. PA为半径作圆. 两圆作差得AB

② 以PC中点为圆心. $\frac{PC}{2}$ 为半径作圆. 两圆作差得AB.

恒成立问题.



① $AF=\frac{p}{1-\cos\theta}$ $BF=\frac{p}{1+\cos\theta}$

② $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{p}$

③ $AB=\frac{2p}{\sin^2\theta}$

④ $S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\theta}$

⑤ $\frac{AF}{BF}=\lambda$ 则 $\cos\theta=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$

⑥ $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$ $y_1y_2=-p^2$

⑦ A_1B_1为直径的圆与AB相切于点F

⑧ AB为直径的圆与准线相切于A_1B_1中点、

数列. 求通项.

1. 公式法.

例：已知数列 $3\frac{1}{4}$，$5\frac{1}{8}$，$7\frac{1}{16}$，$9\frac{1}{32}$ …，试写出通项 $a_n=2n+1+\frac{1}{2^{n+1}}$

一定要写 $a_n=$

2. 已知 S_n 求 a_n.

$$a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2. \end{cases}$$

例：已知 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n=-2n^2+3n+1$. 则 $a_n=\begin{cases} 2 & n=1 \\ 5-4n & n\geq 2. \end{cases}$

$n=1$ $a_1=S_1=-2+3+1=2$.

$n\geq 2$. $a_n=S_n-S_{n-1}=-2n^2+3n+1-[-2(n-1)^2+3(n-1)+1]$

$=5-4n$

当 $n=1$ 时 $a_1=1\neq 2$ 不符合上式.

$\therefore a_n=\begin{cases} 2 & n=1 \\ 5-4n & n\geq 2. \end{cases}$

3. 累加法 $a_{n+1}-a_n=f(x)$.

eg：数列 $\{a_n\}$ 中. $a_1=29$. $a_n-a_{n-1}=2n-1$ $(n\geq 2)$. 求 a_n：.

$n\geq 2$

$a_2-a_1=3$

$a_3-a_2=5$

$a_4-a_3=7$

……

$a_n-a_{n-1}=2n-1$.

各式相加. $a_n-a_1=\frac{(3+2n-1)(n-1)}{2}$

$a_n=n^2+28$ $(n\geq 2)$.

当 $n=1$ 时. $a_n=a_1=29$ 符合上式.

综上：$a_n=n^2+28$.

注意取值范围

并检验.

4. 累乘法. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(x)$.

eg: 在$\{a_n\}$中. $a_1=1$, 且满足$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n+1}$ $(n\geq 2)$ 求a_n.

$n\geq 2$.

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}$ $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{4}$ $\frac{a_4}{a_3}=\frac{4}{5}$ … $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n+1}$.

各式相乘 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n+1}$

$\therefore a_n=\frac{2}{n+1}$ $(n\geq 2)$.

当$n=1$时 $a_n=a_1=1$ 符合上式

$\therefore$ 综上: $a_n=\frac{2}{n+1}$

5. $\{\frac{1}{a_n}\}$为等差. $a_{n+1}=\frac{a_n}{sa_n+1} \Longrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=s+\frac{1}{a_n}$

eg: 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$, 求该数列的通项公式。

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$

$\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$

$\therefore \{\frac{1}{a_n}\}$为等差数列.

$\because \frac{1}{a_1}=1$

$\therefore \frac{1}{a_n}=1+3(n-1)$
$=3n-2$

$\therefore \frac{1}{a_n}=3n-2$

$a_n=\frac{1}{3n-2}$

一定要下结论.

6. $a_{n+1}=Sa_n+t$, 则一定可化为 $(a_{n+1}+x)=S(a_n+x)$ 的形式.

eg: $a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n}+1$ $a_1=2$. 求通项

$a_{n+1}=(\sqrt{a_n}+1)^2$

$\sqrt{a_n}+1=\sqrt{a_{n+1}}$

$\therefore \sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$

$\therefore \sqrt{a_n}$为等差数列.

$\therefore \sqrt{a_n}=\sqrt{2}+(n-1)$
$=n+\sqrt{2}-1$

$\therefore a_n=(n+\sqrt{2}-1)^2$

变式：数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，求$\{a_n\}$的通项。

解：

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+1$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$　$\therefore \{\frac{a_n}{2^n}\}$为等差数列.

$\frac{a_n}{2^n}=1+n-1=n$，　$\therefore a_n=n\cdot 2^n$

求取值问题. [关键：耐心地一步步推].

eg：已知 $a_n=(2n+1)3^{n-1}$，令 $b_n=\frac{2n^2-5n-3}{a_n}$，如果对于任意 $n\in N^*$ 都有 $b_n+\frac{2}{9}t<t^2$ 成立，求 t 的取值范围.

$b_n=\frac{(2n+1)(n-3)}{(2n+1)3^{n-1}}$

$\because n\in N^*$

$\therefore 2n+1>0$.

$\therefore b_n=\frac{n-3}{3^{n-1}}$

$\because b_n+\frac{2}{9}t<t^2$

$\therefore$ 只要 $b_{n\,max}<t^2-\frac{2}{9}t$. 关键

分析何时有最值.

$b_{n+1}-b_n=\frac{n-2}{3^n}-\frac{n-3}{3^{n-1}}$

$=\frac{n-2}{3^n}-\frac{3n-9}{3^n}$

$=\frac{7-2n}{3^n}$

$\therefore$ 当 $n\le 3$ 时，$b_{n+1}>b_n$　有时要算出准确

当 $n\ge 4$ 时　$b_{n+1}<b_n$　数值比较.

$\therefore b_{n\,max}=b_4=\frac{1}{27}$

$\therefore \frac{1}{27}+\frac{2}{9}t<t^2$

$1+6t<27t^2$

$27t^2-6t-1>0$.

$(3t-1)(9t+1)>0$.

$t>\frac{1}{3}$ 或 $t<-\frac{1}{9}$.

求和.

1. 分组求和法

eg：数列 $1\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{4}$，$5\frac{1}{8}$ ……，$(2n-1)\frac{1}{2^n}$ 的前n项和为：$S_n = n^2+1-(\frac{1}{2})^n$

一定要写 $S_n =$

$$S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= n^2+1-(\frac{1}{2})^n$$

2. 并项求和法 （连续n项合并来看有特殊关系）.

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2 = \underline{-5050.}$

$$=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+(5+6)(5-6)+\cdots(99+100)(99-100)$$

$$=-1[1+2+3+4+\cdots\cdots+99+100]$$

$$=-\frac{(1+100)100}{2}$$

$$=-5050$$

3. 倒叙相加法.

eg. 已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(2-x)=2$.

则 $f(-4)+f(-3)+\cdots f(5)+f(6)$ 的值为. 11

$$f(-4)+\cdots\cdots\cdots f(6)$$
$$+\ f(6)+\cdots\cdots f(-4).$$

$$=\frac{11\times 2}{2}=11$$

4. 裂项相消法.

eg ① $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1.$

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + - \cdots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n}{n+1}$

② $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

$\therefore a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$S_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \sqrt{n+1} - 1$

5. 错位相减法.

求 $\{\frac{n}{2^n}\}$ 前 n 项和 S_n.

$S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots \frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$ ②

是乘以公比 q.

① - ② 得 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$= \frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$= 1 - (\frac{1}{2})^n - \frac{n}{2}(\frac{1}{2})^n$

$= -(1+\frac{n}{2})(\frac{1}{2})^n + 1$

$S_n = -(2+n)(\frac{1}{2})^n + 2$

奇、偶问题

eg：$a_1=1$ $\quad a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & n为奇 \\ a_n+2 & n为偶 \end{cases}$

n为奇数时 $a_{n+1}=a_n+1$

$a_{n+2}=a_{n+1}+2=a_n+3$ $\qquad a_{n+2}=a_n+3$

n为偶数时 $a_{n+1}=a_n+2$

$a_{n+2}=a_{n+1}+1=a_n+3.$ $\qquad a_{n+2}=a_n+3.$

∴奇数项、偶数项，分别为公差为3的AP.

在各项都为正数的情况下.

加减问题的0相当于乘除问题的1

① 已知 S_n 求 a_n $\qquad a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2 \end{cases}$

② 求 a_n. 已知 T_n $\quad T_n$ 为前n次项的积

$T_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-1}a_n=T_{n-1}\times a_n$

$a_n=\begin{cases} T_1 & n=1 \\ \frac{T_n}{T_{n-1}} & n\geq 2 \end{cases}$

③ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

常用于应对问题.

已知 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{an+b}{cn+d}$ 求 $\frac{a_4+a_5}{a_6+a_7}\cdots$

关键在于先求出两数列的公差和首项 a_1

再推出 a_n，b_n，

放缩法 $\begin{cases} \text{全部放缩} \\ \text{局部放缩.} \end{cases}$

例：已知 $C_n=(\frac{1}{n+1})^2$ T_n 为 $\{C_n\}$ 前n项和. ①求证 $T_n<1$. 全部放缩.

$$C_n=(\frac{1}{n+1})^2<\frac{1}{n(n+1)}$$

$$T_n=C_1+C_2+\cdots\cdots C_n$$

$$=(\frac{1}{2})^2+\cdots\cdots\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\because \frac{1}{n+1}>0$$

$$\therefore T_n<1$$

②求证 $T_n<\frac{3}{4}$

$$T_n=C_1+C_2+\cdots\cdots C_n$$

$$=(\frac{1}{2})^2+\cdots\cdots(\frac{1}{n+1})^2<\frac{1}{4}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{n+1}$$

各类注意点.

q为1的等比数列为常数列.

若 $S_n=0$，则等比数列的q为-1.

排列

定义：从n个不同元素中取出m个元素（$m \le n$），按顺序排成一列

$A_n^m = n(n-1) \times \cdots\cdots (n-m+1)$

阶乘 $A_n^n = n!$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$A_{n+1}^{n+1} = (n+1)A_n^n$

例1：12支足球队，主、客场各比1次，共进行____场比赛。A_{12}^2

例2：6朵不同花选3朵送给3人，共____种。A_6^3

6种不同花（每种至少3朵）买3朵送3人，每人各1朵，共____种。6^3

例3：0-9 这10个数，共组成 $\underline{9\times9\times8}$ $=9\times A_9^2$ 个没有重复的3位数。

先看百位，百位不为0，共9种。

再看十位，除去百位一个数，剩9个数。

……个……，……百位十位2个数，剩8个数。

例6：(1) 7人站一排，共 $\underline{A_7^7}$ 种排法。

(2) 7个站一排，前3后4共 $\underline{A_7^7}$ 种。相当于排一列。

(3) 7人一排，甲站中间共 $\underline{A_6^6}$ 种。相当于把甲除去，6人排一列。

(4) 7个一排，甲乙只能站两端。

$2A_5^5$

椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

A、B 为椭圆上 2 动点，且 AB 中点到原点 O 距离为 1，求 △AOB 面积最大值。

① k 不存在，AB: $x=\pm 1$ 　$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$

② k 存在，AB: $y=kx+m$ 　$A(x_1, y_1)$ 　$B(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

$$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$$

中点为 $M\left(-\frac{4km}{4k^2+1}, \frac{m}{4k^2+1}\right)$

$$OM=1$$

$$m^2(16k^2+1)=(4k^2+1)^2$$

$$d_{O\to AB}=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$|AB|=4\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{4k^2-m^2+1}}{4k^2+1}$$

$$S=\frac{2\sqrt{m^2(4k^2-m^2+1)}}{4k^2+1}$$

运用基本不等式. $\frac{m^2+4k^2-m^2+1}{2}\cdot\frac{1}{4k^2+1}\geq S$ 　$=\frac{1}{2}$

当 $m^2=4k^2-m^2+1$ 时，

$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ 　$m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 　得 $S\leq 1$

$\therefore S_{max}=1$

已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过 F_1 斜率为 k 的直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，若线段 PQ 中垂线与 x 轴交于 N，求证 $\frac{|PQ|}{|NF_1|}$ 为定值。

设 $P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$

l：$y=kx+b$

$$\begin{cases} 3x^2+4y^2=12 \\ y=kx+b \end{cases}$$

$(4k^2+3)x^2+8kbx+4b^2-12=0$

$x_1+x_2=-\frac{8kb}{4k^2+3}$　$x_1x_2=\frac{4b^2-12}{4k^2+3}$

PQ 中点为 $\left(-\frac{4kb}{4k^2+3},\frac{3b}{4k^2+3}\right)$

l 中垂线 $y-\frac{3b}{4k^2+3}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4kb}{4k^2+3}\right)$

$$y=-\frac{1}{k}x-\frac{b}{4k^2+3}$$

当 $y=0$ 时，$x=-\frac{kb}{4k^2+3}$

$\therefore N\left(-\frac{kb}{4k^2+3},0\right)$

$|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{64k^2b^2-(16b^2-48)(4k^2+3)}{(4k^2+3)^2}}$

$=\frac{4\sqrt{9+12k^2-3b^2}}{4k^2+3}$

l 过 F_1

$\therefore -k+b=0$，

$k=b$。

$\therefore N\left(-\frac{k^2}{4k^2+3},0\right)$。

$\therefore |x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{9k^2+9}}{4k^2+3}$

$PQ=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$

$NF_1=\frac{3(k^2+1)}{4k^2+3}$

$\therefore \frac{|PQ|}{|NF_1|}=4$ 为定值。

10. 已知过点 $A(a,0)$ 可以作曲线 $y=(x-1)e^x$ 的两条切线，则实数 a 的取值范围是（ ）

设切点 (x_0, y_0).

切线 $y-(x_0-1)e^{x_0}=x_0 e^{x_0}(x-x_0)$.

过点 $A(a,0)$

$\therefore -(x_0-1)e^{x_0}=x_0 e^{x_0}(a-x_0)$

$x_0-1=x_0^2-ax_0$

$\Rightarrow x_0^2-(a+1)x_0+1=0$ $\Delta>0$.

$\therefore \Rightarrow a\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

14. 将数列 $\{3n\}$ 与 $\{2^n\}$ 的所有项放在一起，按从小到大的顺序排列得到数列 $\{a_n\}$，其前 n 项的和为 S_n，则 $a_4=$ 6，$S_{108}=$______.

$n=108$ 时 $3n=324$.

$n=8$ 时 $2^n=256$

$n=100$ 时 $3n=300$

$\{a_n\}$ 中前 108 项含 $\{3n\}$ 数列中的前 100 项和 $\{2^n\}$ 中的前 8 项.

7. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_{2025}=$（ A ）

A. 1 B. 2025 C. 4048 D. 4050

$a_1=1$ $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$

n 为奇数时 $a_{n+1}-a_n=2n-1$ ①

$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+1$ ②

② − ① 得 $a_{n+2}+a_n=2$ 为周期数列

$\because a_1=1$ $\therefore a_3=1$ …… $a_n=1$ (n 为奇)

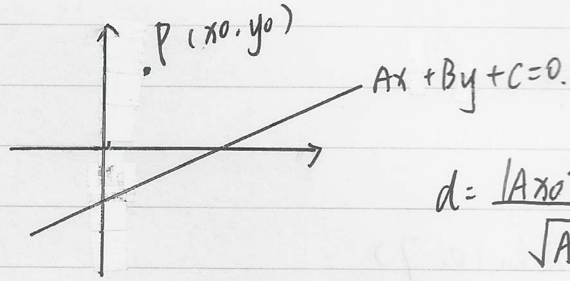
点、直线距离公式

点、直线

1 点、点

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

点—直线



$$d=\frac{|Ax_0^2+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

直线 平行 直线.

① 任取一点，用点、直线距离公式

② $\begin{cases}Ax+By+C_1=0\\Ax+By+C_2=0\end{cases}$ $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 确保A、B相等.

例：已知点 $A(1,3)$ $B(3,1)$ $C(-1,0)$ 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h.$

$|AB|=2\sqrt{2}$

$l_{AB}: y=\frac{-2}{2}(x-1)+3=-(x-1)+3=-x+4$

l_{AB} $x+y-4=0.$

$$h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=5$

例：已知直线 l_1：$2x-7y-8=0$ l_2：$6x-21y-1=0$（$2x-7y-\frac{1}{3}=0.$）l_1与l_2是否平行？若平行，求l_1与l_2间的距离.

①
$$d=\frac{|-8-\frac{1}{3}|}{\sqrt{2^2+7^2}}=\frac{23}{3\sqrt{53}}$$

② 当 $y=0$，$x=4$，$\therefore l_1$ 过 $(4,0)$

$$d=\frac{|4\times6-21\times0-1|}{\sqrt{6^2+(-21)^2}}=\frac{23}{3\sqrt{53}}$$

$Ax+By+C=0$. 有一个未知数. 必经过 1个定点.

例. $(a-1)x+y+7=0$

$xa-x+y+7=0$

$\begin{cases} x=0 \\ -x+y+7=0 \end{cases}$

$\therefore y=-7$

$\therefore$ 一定经过定点 $(0,-7)$

例: 已知 $a\in R$. 若不论a为何值时. 直线l: $(1-2a)x+(3a+2)y-a=0$ 总经过一个定点. 则这个定点坐标为

$(-2x+3y-1)a+x+2y=0$

$\therefore \begin{cases} -2x+3y-1=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=-\frac{2}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$ $\therefore$ 一定过定点 $(-\frac{2}{7},\frac{1}{7})$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cos\theta\, ab.$$

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

HUNGRY

合格品检

品名:B5无线胶装本_running
货号:ZF-387-2
规格:179*250MM
页数:40页
执行标准:QB/T1438-2007

授权商:湖北省臻丰梓业大数据科技有限公司
生产商:浙江吉猫文具有限公司
地址:浙江省金华市东阳市前宅工业区
电话:400-855-6693

6 973298 083878