排列 组合 重开啦!

1.若集合A={1,2,3},B={1,4,5,6},从这两个集合中各取一元素作为直角坐标系中一点的坐标,则能确定的不同点的个数是 23

$\underset{\text{A抽1个}}{3} \times \underset{\text{B抽1个}}{4} \times \underset{\text{前后排列}}{2} - 1$.

(1,1) 因为(1,1)重复了,有2个(1,1).

2.从1.2.3.4.5.6.7.8.9这9个数字中任意选取2个,其中一个作为底数,另一个作为真数,则可以得到不同对数值的个数为 53.

$\log_a b$ (a>0且a≠1).

1° 首先考虑 1 存在的情况.

1不能为底,1为真时,$\log_a 1 = 0$. ∴ a取任何数,值都为0. 1种.

所求为数值. $\log_{a^m} b^m = \log_a b$

在对数中:$\log_2 3 = \log_4 9$ $\log_9 4 = \log_3 2$

$2 = \log_2 4 = \log_3 9$ $\frac{1}{2} = \log_4 2 = \log_9 3$

2° 1不存在情况.

$\underset{\text{先选底}}{8} \cdot \underset{\text{再选真}}{7} - 4$.

因为任选2数,两数不同,即A_8^2

∴ 总共 $1 + (8\times7-4) = 53$.

☆ 总结:在算的时候要考虑结果重复的情况,并且确定元素是否可重复使用.

$A_n^m = \frac{m!}{(n-m)!}$ (n≥m).

$A_n^0 = 1$ (规定)

$A_n^n = n!$ 全排列

$A_n^1 = n$

$0! = 1$ (规定)

: 排列公式.

NO. Date

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n \geq m)$$

$C_n^0 = 1$ $\quad C_n^m = C_n^{n-m}$

$C_n^n = 1$

组合公式.

1. 4个数字1和4个数字2中可以组成不同的8位数有（70.）个.

_ _ _ _ _ _ _ _ 共8个位置.

取4个位置放1. 当1的位置确定后. 剩余位置都排2.

则问题 ⟹ 从8个位置中选4个位置 C_8^4

$$C_8^4 = \frac{A_8^4}{A_4^4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70\ (个).$$

综合

1. 从4个男同学, 5个女同学中选出3个同学站成一排合影, 且男女皆有, 有420种

分类 1男2女. $C_4^1 C_5^2 = \frac{A_4^1}{A_1^1} \times \frac{A_5^2}{A_2^2} = \frac{4\times5\times4}{1\times2\times1} = 40$

组合. 1女2男. $C_5^1 C_4^2 = 5 \times \frac{4\times3}{2\times1} = 30$

坑!!!

选完以后还要排列.

排列. $(C_4^1 C_5^2 + C_5^1 C_4^2) A_3^3 = 420$

相邻.（捆绑法）

NO. Date

①

2. 6名大学生站成一排. 甲与乙必须相邻站. 有 $A_5^5A_2^2$ 种.

捆绑法. 甲与乙看成1个整体. A_5^5 整体排

甲乙两人再排列. $A_5^5A_2^2$ 内部排.

∴有 $A_5^5A_2^2$ 种.

难度 ••

② 三家人相约出行拍照. 第一家2口人. 第二.三家分别3口人. 三家人站一排拍照. 每家人必须站一起. 有 432 种.

3家人看成整体 A_3^3 整体排

再内部排. $A_2^2A_3^3A_3^3$ 内部排.

第一家 第二家 第3家.

∴ $A_3^3A_2^2A_3^3A_3^3=432$

难度 •••

③. A.B.C.D.E. 站成一排. A不站两端. CD相邻. 有____种.

第1步. 1° CD看成一整体. 则可看成 A B CD E 4个元素排列. A_4^4

A不站两端. A站在头 A_3^3 A站在末 A_3^3 整体排.

∴有 $A_4^4-2A_3^3$ 种.

第2步. 2° CD内部排 A_2^2.

∴总 $(A_4^4-2A_3^3)A_2^2$

难度 ••••

想相邻. 就捆绑. 整体排完内部排

不相邻（插空法）

1、6把椅子排成一排，3人随机就座，任何两人不相邻的座法种数（A

A B C _ _ _

⇓

相于 3个空位，插ABC.

○—○—○—○

↑

A B C 插入.

有4个空，A_4^3

2. 一条路上有10盏灯，可熄灭其中三盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的2盏灯，有___20___种方法。

○ ○ ○ ⊘ ○ ⊘ ○ ⊘ ○ ○

熄灭3盏，7盏亮，即3黑7白排序.

○_○_○_○_○_○_○

⊘ ⊘ ⊘ 3黑插序，且首尾不插.

∴有6个空，$C_6^3=\frac{A_6^3}{A_3^3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ 种

总结：看到不相邻，便将问题向插序法上转换，再根据条件分析.

不相邻，最后排，别人排完去插空.

加难度 ●●●●●

相邻不相邻一起考.

1. 用数字1.2.3.4.5.6.组成 .不重复的6位数，1.2相邻. 3.4不相邻.
有（144）种.

1° ○ (1.2) ○ 5 . ○ 6 . ○ 整体

3.4插空.

有4个空.

(1.2).5.6先排 A_3^3 ，3.4插空 $\begin{cases} A_4^2 \\ 或 C_4^2A_2^2 \end{cases}$

2° 1.2内部排 A_2^2.

∴总 $A_3^3A_4^2A_2^2=144$

附加特殊要求.

2. A.B.C.D.E 5名同学坐一排照相. 要求A.B不能同时坐两旁. 也不能相邻坐.
则有 60 种。

1° ○ C ○ D ○ E ○ 先取出来排列. A_3^3

2° A.B插空. 因为A.B不坐两旁.
∴有2个空. $\begin{cases} A_2^2 \\ 或 C_2^2A_2^2 \end{cases}$ 总 $A_3^3A_2^2$ ✗

∵A.B是不同时坐两旁.

∴应该是. AB插空 有 4个空 A_4^2

减去同时在两旁. 2.

∴ $A_3^3(A_4^2-2)=60$

定序问题，放到一起排

1. 4人看表演，甲、乙加入，原4个相对顺序不变有 30 种。

注：此类问题不能用插空法，因为可能甲乙两人相邻。
故应用整体法。

A _ B _ C D

原4人 ABCD先排，ABCD顺序固定，即6个中选4个位置，C_6^4。
剩余2个位置甲乙排列，A_2^2

$\therefore C_6^4 A_2^2 = 30$

2. 10人合影，前排4人，后排6人，从后排6人中抽2人到前排，其他人相对顺序不变，有 $C_6^2 C_6^4 A_2^2$ 种。

B A C D
E F G H I J

先抽2人，C_6^2
然后前面4人加上抽取的2人看成整体，回归上一问题 $C_6^4 A_2^2$
$\therefore$ 共 $C_6^2 C_6^4 A_2^2$

名额问题 挡板法

1. 有8个名额，有4个班级，每班至少派1人，有____种。

○ ○ | ○ ○ ○ | ○ ○ | ○ ○

挡板法 C_7^3
有7个空，放3个棍。

NO. Date

2. 有10名额,分给A、B、C, A至少分3个, B至少分2个, C至少分1个. 有 C_6^2 种.

法一: 先提前给A 2个, 给B 1个, 给C 0个。

然后剩 7个. OOOOOOO

有6个空用挡板 C_6^2

法二: 先提前给A 3个, B 2个, C 1个.

剩4个球, 因为要分3组, 则要2个挡板.

4球 2挡板 排序.

— — — — — — 6个位置, 选2个给挡板. C_6^2

3. 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ 的正整数解的个数为 C_7^3,

$x\geq1$.

OOOOOOOO 分成4份, 切3刀, 有7个空 C_7^3

方程 $\overset{\geq1}{x_1}+\overset{\geq1}{x_2}+\overset{\geq1}{x_3}+\overset{\geq1}{x_4}+\overset{\geq1}{x_5}=9$ 的非负整数解的个数为 C_{13}^4

$(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)+(x_4+1)+(x_5+1)=14$

13个空, 切4刀 C_{13}^4

分组问题

1. 6本不同书，求下列情况的不同分法的种数。

① 一组4本，一组2本 $C_6^4C_2^2$

② 一组3本，一组3本 $\cancel{C_6^3C_3^3}$ 应该为 $\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}$

③ 一组3本，一组2本，一组1本 $C_6^3C_3^2C_1^1$

④ 一组2本，一组2本，一组2本。 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$

⑤ 一组2本，一组2本，一组1本，一组1本。 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2\cdot A_2^2}$

⑥ 一组3本，一组1本，一组1本，一组1本 $\frac{C_6^3C_3^1C_2^1C_1^1}{A_3^3}$

分组 + 分配

6本不同的书

①分四组，一组2本，一组2本，一组1本，一组1本，分给甲、乙、丙、丁4个人

$$\frac{C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2\cdot A_2^2}\cdot A_4^4$$

先分组，再分配。

1. 4名同学去3个小区工作，每同学只去一个小区，每小区至少要排1人，有 36 种。

4个人分3组 一组2人，一组1人，一组1人。

$$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3=36$$

2. 5名同学去参加3个项目，每同学只去1个项目，每项目至少1人，有 150 种。

5个分3组 一组3人，一组1人，一组1人。 $\frac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3$ ①

一组2人，一组2人，一组1人。 $\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}A_3^3$ ②

总 = ① + ② = 150种

分组＋分配＋特殊要求

1. 5名老师去3所乡村学校支教，有一对夫妇参与支教，每位老师只能去一所学校，每学校至少1人，夫妇必须去同一所则有 36 种.

男. 女. A. B. C.

男.女一

3 1 1 $C_3^1\cdot A_3^3$ 总 $C_3^1A_3^3+C_3^2\cdot A_3^3=36$

2 2 1 $C_3^2\cdot A_3^3$

男女

2. 5名特警分3个路口，每人只能去1个路口，每路口至少1人，甲乙不能在同一路口，有 114 种.

所有分组 甲乙在一起

3 1 1 $(C_5^3-C_3^1)A_3^3$ ① 总 ①+② = 114

2 2 1 $\left(\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}-C_3^2C_1^1\right)A_3^3$ ②

7名老师去3个年级，每年级至少2人，甲乙去同一年级，且丙不去高一，有 100 种.

分组 3 2 2

甲乙一

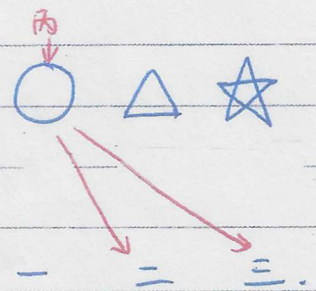
$\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}$

3 2 2

甲乙

$C_5^3C_2^2$

甲. 乙. 丙. A. B. C. D.



含丙有2组可选 ×2.

丙选完后剩余2组有2种可选 A_2^2

∴有 $2A_2^2$ 分配.

总 $\left[\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}+C_5^3C_2^2\right]\cdot 2\cdot A_2^2=100$

已知 $a_n=3^n$，求 b_n 通项。

法1. $a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1=3^{n+1}-3n-3$

$3b_n+3^2b_{n-1}+3^3b_{n-2}+\cdots 3^nb_1=3^{n+1}-3n-3$ ①

$a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1=3^n-3(n-1)-3$

$3b_{n-1}+3^2b_{n-2}+\cdots 3^{n-1}b_1=3^n-3n$

$3^2b_{n-1}+3^3b_{n-2}+\cdots 3^nb_1=3^{n+1}-9n$ ②

① - ② 得 $3b_n=6n-3 \Longrightarrow b_n=2n-1$

法2. $a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1=3^{n+1}-3n-3$

$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{3^n-n-1}{3^n}$

$\therefore \frac{b_n}{a_n}=\frac{3^n-n-1}{3^n}-\frac{3^{n-1}-(n-1)-1}{3^{n-1}}$

$b_n=2n-1$

当 $n=1$ 时 $a_1b_1=3^2-3\times3-3$

$b_1=1$ 符合上式

$\therefore b_n=2n-1$