高三数学第二轮复习讲义（43）

第43课时 基于函数结构处理含指对数的不等式问题

班级 14 学号 08 姓名 张

【专题分析】

在证明或处理含对数函数、指数函数的不等式时，往往需要对函数求导，并求导函数零点，若导函数中仍然含有对数或者指数且无法直接求出其零点，这将给我们解题带来较大的困难，我们往往需要对不等式或者方程进行等价变形，采取“对数独行，指数结伴”的基本原则，以便于迅速找出导函数零点，为研究函数的单调性扫清障碍。对数单身狗.指数找朋友

【例题探究】

1．（1）当$1<x<2$时，求证$(x+1)\ln x>2(x-1)$．

（2）当$x\geq 0$时，求证$e^x-x^2\geq 1$．

(1)解：$\because x\in(1,2)$

要证 $x+1>0$
$(x+1)\ln x>2(x-1)$

只要证 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}=2-\frac{4}{x+1}$

$\therefore \ln x+\frac{4}{x+1}>2$ $x\in(1,2)$

令 $g(x)=\ln x+\frac{4}{(x+1)}$

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$

$=\frac{x^2+2x+1-4x}{x(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$

$\therefore g(x)$ 在 $(1,2)$ ↑. $\therefore g(x)>g(1)=2$

得证.

(2) 要证 $e^x\geq x^2+1$

只要证 $\frac{x^2+1}{e^x}\leq 1$

令 $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$

$f'(x)=\frac{2x e^x-(x^2+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-(x-1)^2}{e^x}\leq 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↓.

$\therefore f(x)\leq f(0)=1$.

$\therefore$ 得证.

【变式联想】

2．若不等式$x\ln x\geq a(x-1)$对任意$x\in[1,+\infty)$恒成立，求实数a的取值范围．

$\because x\in[1,+\infty)$

$\therefore \ln x\geq\frac{a(x-1)}{x}$

$\therefore$ 要证 $x\ln x\geq a(x-1)$

只要证 $\ln x-\frac{a(x-1)}{x}\geq 0$.

令 $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x}$

$g'(x)=\frac{1}{x}-a\frac{x-(x-1)}{x^2}$

$=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$

$=\frac{x-a}{x^2}$

1° 当 $a\leq 1$ 时. $g'(x)\geq 0$ 恒成立

$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ ↑. $g_{min}=g(1)=0$ 符合.

2° 当 $a>1$ 时. 令 $g'(x)=0$. $x=a$.

$g(x)$ 在 $[1,a)$ ↓ 在 $(a,+\infty)$ ↑.

$g_{min}=g(a)=\ln a-a+1\geq 0$.

令 $h(x)=\ln x-x+1$

$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

当 $x>1$ 时. $h'(x)<0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ ↓.

$\because h(1)=0$

$\therefore h(x)<0$ 恒成立.

$\therefore \ln a-a+1<0$ 恒成立. 矛盾. 舍去

综上：$a\leq 1$

端点效应.

$h(x)$ 在 $[1,a)$ ↓.
$\therefore x_0\in[1,a)$
$h(x)<h(1)=0$
与题意矛盾.

【串讲激活】

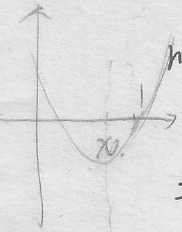
3．已知函数 $f(x)=e^x+(1-e)x$，$g(x)=x\ln x+1$．证明：$f(x)\ge g(x)$．

证明：令 $h(x)=f(x)-g(x)$

$=e^x+(1-e)x-x\ln x-1$

$h'(x)=e^x+1-e-(\ln x+1)$

$=e^x-e-\ln x$



$h''(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$.

$h''(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0$ $h''(1)=e-1>0$

$\exists$ $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $h''(x_0)=0$

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,x_0)\downarrow$ 在 $(x_0,+\infty)\nearrow$.

$\because h'(1)=-1$.

$\therefore h'(x_0)<h'(1)<0$.

$h'(e^{-3})>0$.

要证 $f(x)\ge g(x)$

只需证 $\frac{e^x}{x}+(1-e)\ge\ln x+\frac{1}{x}$.

令 $h(x)=\frac{e^x}{x}+(1-e)-\ln x-\frac{1}{x}$

$h'(x)=\frac{xe^x-e^x+1-x}{x^2}$

$=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$

$\because x>0$.

$\therefore e^x>1$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)\downarrow$ 在 $(1,+\infty)\nearrow$.

$\therefore h(x)$ 在 $x=1$ 处取 min.

$h_{min}=e+1-e-0-\frac{1}{e}$

$=1-\frac{1}{e}>0$

$\therefore$ 得证.

【决胜高考】

4*（选做）．已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$．

(1)当 $a=1$ 时，讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\ge0$ 时，$f(x)\ge\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围．

(1)解：$\because a=1$

$\therefore f(x)=e^x+x^2-x$

$f'(x)=e^x+2x-1$

$f''(x)=e^x+2>0$ 恒成立

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)\nearrow$

又 $f'(0)=0$

$\therefore$ 令 $f'(x)>0$. $x>0$.

令 $f'(x)<0$ $x<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$

在 $(-\infty,0)\downarrow$.

(2) $e^x+ax^2-x\ge\frac{1}{2}x^3+1$.

$e^x\ge\frac{1}{2}x^3+1-ax^2+x$

$1\ge\frac{\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1}{e^x}$

$h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1}{e^x}$

$h'(x)=\frac{\frac{3}{2}x^2-2ax+1-\frac{1}{2}x^3+ax^2-x-1}{e^x}$

$=\frac{-\frac{1}{2}x^3+(\frac{3}{2}+a)x^2-(2a+1)x}{e^x}$

$=\frac{-\frac{x}{2}(x-2)[x-(2a+1)]}{e^x}$

$\begin{cases}h(2a+1)\le1\\h(0)\le1\end{cases}$

$h(2a+1)=\frac{(2a+1)^2(a+\frac{1}{2}-a)+(2a+1)+1}{e^{2a+1}}\le1$

$=\frac{\frac{1}{2}(2a+1)^2+(2a+1)+1}{e^{2a+1}}$

令 $2a+1=t$ $t>2$.

$\therefore h(t)=\frac{\frac{1}{2}t^2+t+1}{e^t}$

$h'(t)=\frac{t+1-\frac{1}{2}t^2-t-1}{e^t}$

<0 恒成立

$\therefore h(t)$ 在 $(2,+\infty)\downarrow$

$h_{max}<h(2)=\frac{5}{e^2}<1$ 符合

1° 当 $2a+1>2$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时

$h(x)$ 在 $(0,2)$，$(2a+1,+\infty)\downarrow$

在 $(2,2a+1)\nearrow$.

$h(x)$ 在 $x=2a+1$ 处取极大值.

$\because h(x)\le1$ 恒成立

$\therefore\begin{cases}h(2a+1)\le1\\h(0)\le1\end{cases}$ $\because h(0)=1$ 符合.

2° 当 $2a+1=2$ 即 $a=\frac{1}{2}$ 时.

$h'(x)\le0$ 恒成立

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)\downarrow$.

$h_{max}=h(0)=1$ 符合

3° 当 $0<2a+1<2$ 时 即 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时.

$h_{max}=h(0)$ 或 $h(1)$

$\begin{cases}h(0)\le1\\h(2)\le1\end{cases}\Rightarrow a\ge\frac{7-e^2}{4}$

$\therefore\frac{7-e^2}{4}\le a<\frac{1}{2}$

4° 当 $2a+1\le0$ 时

即 $a\le-\frac{1}{2}$ 时

$h(x)$ 在 $[0,+\infty)\nearrow$ 恒成立

$\because h(0)=1$

$\therefore h(x)\ge1$ 与题意矛盾

不符合.

综上：$\therefore a\ge\frac{7-e^2}{4}$

解：$\because f(x) \geq \frac{1}{2}x^3+1$ Date 张婷妍

$\therefore e^x + ax^2 - x - \frac{1}{2}x^3 - 1 \geq 0$

$ax^2 \geq \frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x$

1° 当 $x=0$ 时，$ax^2=0$，$\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x=0$ 符合题意

2° 当 $x>0$ 时，$a \geq \dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$

令 $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{x^2}$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - 2 - (x-2)e^x}{x^3}$$ （因式分解）

$$= \frac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x^2 - x - 2 - (x-2)e^x}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2(x-2) + (x-2)(x+1) - (x-2)e^x}{x^3}$$

$$= \frac{(x-2)(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x)}{x^3}$$

令 $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x$

$h'(x) = x + 1 - e^x \leq 0$

$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↓

$h(x) < h(0) = 0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ ↑ 在 $(2,+\infty)$ ↓

$\therefore g_{max} = g(2) = \frac{7-e^x}{4}$

$\therefore a \geq \frac{7-e^x}{4}$