$x=e^{\ln x}=\ln e^{x}$

高三数学第二轮复习讲义（42）

根据数据特征构造函数解决恒成立问题

班级 14 学号 05 姓名 张媛妍

【专题分析】

同构法是将代数式通过变形转化为结构相同或相近的式子，通过整体思想将问题转化的思想方法。通过已知等式或不等式的结构特征构造新函数，解决恒成立问题。

【例题探究】

例 1．已知函数 $f(x)=x-a\sin x$，若对任意 $x_1,x_2\in R$且$x_1\neq x_2$ 都有不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $a\leq\frac{1}{2}$ ．

$x_1>x_2$

$f(x_1)-f(x_2)>ax_1-ax_2$

$f(x_1)-ax_1>f(x_2)-ax_2$

$g(x)=x-a\sin x-ax$

$g'(x)\geq0$ 恒成立.

$1-a\cos x-a\geq0$

$a(1+\cos x)\leq1$

【变式联想】

$xe^x-a(\ln xe^x+1)$

已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x+1)$，若 $f(x)\geq0$ 恒成立，则正数 a 的取值范围是 $(0,1]$

隐零点.

$f'(x)=(x+1)(e^x-\frac{a}{x})$

$g(x)=e^x-\frac{a}{x}$ ↗

$\because a>0$.

$x\to0$　$g(x)\to-\infty$

$g(a)=e^a-1>0$

∃唯一 x_0　$g(x_0)=0=e^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$

$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ ↓ $(x_0,+\infty)$ ↗

$f_{min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0+1)$

$=a-a\ln a+1$

$=-a\ln a\geq0$.

$a\ln a\leq0$

$\ln a\leq0$.

$0<a\leq1$

【串讲激活】

若 $f(x)=x+\ln x$　$f(e^x)=e^x+x$

若 $f(x)=x-\ln x$　$f(e^x)=e^x-x$

若 $f(x)=x\ln x$　$f(e^x)=xe^x$

已知函数 $f(x)=m\ln(x+1)-3x-3$，若不等式 $f(x)>mx-3e^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是（ C ）．

A．$0\leq m\leq3$　　B．$m\geq3$　　C．$m\leq3$　　D．$m\leq0$

$g(x)=mx-3e^x$.

$g[\ln(x+1)]=m\ln(x+1)-3(x+1)$

$\therefore g[\ln(x+1)]>g(x)$.　$\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

$\ln(x+1)\leq(x+1)-1=x$.　$x=0$时取"="

$\therefore\ln(x+1)<x$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↓.

$\therefore g'(x)\leq0$.

$g'(x)=m-3e^x\leq0$ 恒成立

$m\leq3e^x=3$.

例 2．函数 $f(x)=e^{x+a}-\ln x$．若 $f(x)\geq 0$，求整数 a 的最小值．

$f(x)=e^{x+a}-\ln x$

$=e^a\cdot e^x-\ln x\geq 0$

$e^a\geq\frac{\ln x}{e^x}$

$g(x)=\frac{\ln x}{e^x}$

$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$

令 $h(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ ↓

$h(1)=1>0$

$h(2)=\frac{1}{2}<0$

$\exists x_0\in(1,2)$　$h(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0=0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ ↗ $(x_0,+\infty)$ ↓.

$g_{max}=g(x_0)=\frac{\ln x_0}{e^{x_0}}$

$=\frac{1}{x_0e^{x_0}}$

$e^a\geq\frac{1}{x_0e^{x_0}}=\frac{1}{e^{\ln x_0}e^{x_0}}$

$=\frac{1}{e^{\ln x_0+x_0}}$

$=e^{-\ln x_0-x_0}$

$\therefore a\geq-\ln x_0-x_0$.

$=-\frac{1}{x_0}-x_0$.

$=-(x_0+\frac{1}{x_0})$

$\because x_0\in(1,2)$

$x_0+\frac{1}{x_0}\in(2,\frac{5}{2})$

$\therefore -x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\frac{5}{2},-2)$.

先限制 a 的范围．

当 $x=e$ 时．

$f(e)=e^{e+a}-1\geq 0$

$a\geq -e$.

下面证明 $a=-2$.

$f(x)=e^{x-2}-\ln x$

$\geq x-2+1-\ln x$

$=x-1-\ln x\geq 0$.

$\therefore a_{min}=-2$.

$\therefore a$ 的最小整数解为 -2.

例 3．已知函数 $f(x)=e^x-ax-\cos x$，$x\in[0,+\infty)$．若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

$f(0)=0$

$f'(x)=e^x-a+\sin x$

$=e^x+\sin x-a$.

$f''(x)=e^x+\cos x>0$ 恒成立

$\therefore f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↗.

1° $f'(0)=1-a\geq 0$

$a\leq 1$

$\therefore f'(x)\geq f'(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ ↗

$\therefore f(x)\geq f(0)=0$ 符合题意.

2° $f'(0)=1-a<0$　即 $a>1$

$f'(\ln(a+2))=2+\sin(\ln(a+2))>0$.

$\therefore\exists x_0\in(0,\ln(a+2))$ 使得 $f'(x_0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ ↓. $(x_0,+\infty)$ ↗.

$\therefore f(x)<f(0)=0$　不符合题意 $f(x)\geq 0$ 恒成立

当 $x\in(0,x_0)$ 时.　$\therefore$ 舍.

端点效应.　$[a,+\infty)$ 恒成立.

$f(x)\geq f(a)$

① $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ ↗

② $f'(x)\geq 0$ 恒

综上：$a\leq 1$.