高三数学第二轮复习讲义（41）

第 41 课时　根据数据特征构造函数比较大小

班级 14　学号 03　姓名 张姝妍

【复习目标】

能够将式子写成形式对等式，提炼函数模型构造函数，利用导数研究函数的单调性，再由单调性比较大小或解不等式.

【例题探究】

1. （多选）已知 $x>y>0$，则下列不等式正确的有（ACD）

A. $e^x-e^y>x-y$ ✓.　　~~B.~~ $\ln x-\ln y>x-y$

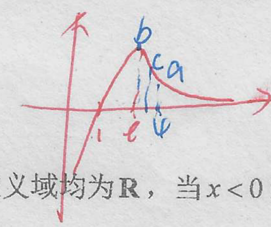
C. $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$　　D. $\dfrac{e^x}{y}>\dfrac{e^y}{x}$ ✓.

$\ln x\leq x-1$　令 $x=\frac{1}{x}$.

$f(2)=f(4)$　$f(e)$.　$f\left(\frac{e^2}{2}\right)$　$\dfrac{\ln\frac{e^2}{2}}{e^2}$.

2.已知 $a=\dfrac{\ln 2}{4},b=\dfrac{1}{2e},c=\dfrac{2-\ln 2}{e^2}$，则这三个数的大小关系为（C.）　$\dfrac{\ln x}{2x}$

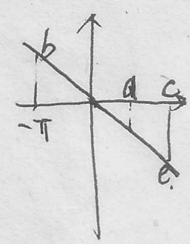
A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$



$[f(x)x]'<0$.

3.已知奇函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为R，当 $x<0$ 时，$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}>0$.若 $a=f(1)$，$b=-\pi f(-\pi),c=ef(e)$，则 a,b,c 的大小关系正确的是（D.）

$f(x)$奇.
$g(x)$偶.



A. $b<c<a$　　B. $c<a<b$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

4.已知 $f'(x)$ 是定义在R上的函数 $f(x)$ 的导函数，且 $f(x)-xf'(x)>0$，则 $a=\dfrac{1}{2}f(2)$，$b=\dfrac{1}{e}f(e)$，$c=\dfrac{1}{3}f(3)$ 的大小关系为（B）.

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $c<a<b$

$\log_5 3 > \log_5 5^{\frac{3}{5}}$　$\log_8 5$　$\log_8 8^{\frac{3}{5}}$

3　$5^{\frac{3}{5}}$　$5^5 > 8^3 = 2^9 = 512$

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

基本不等式.

5. 已知 $5^5 < 8^4, 13^4 < 8^5$．设 $a = \log_5 3, b = \log_8 5, c = \log_{13} 8$，则（ A ）

A．$a < b < c$　　B．$b < a < c$　　C．$b < c < a$　　D．$c < a < b$

$a-b = \frac{\ln 3}{\ln 5} - \frac{\ln 5}{\ln 8}$

$= \frac{\ln 3 \ln 8 - \ln 5^2}{\ln 5 \ln 8}$

$\left(\frac{\ln 24}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ln 25}{2}\right)^2$

$5\log_8 5 < \log_8 8^4$　　$4 < 5\log_{13} 8$　　$\log_5 3 \ \frac{4}{5} = \log_5 5^{\frac{4}{5}}$

$\log_8 5 < \frac{4}{5}$　　$\log_{13} 8 > \frac{4}{5}$　　$a < \frac{4}{5}$　$b > \frac{4}{5}$

$3 < 5^{\frac{4}{5}}$

$3^5 < 5^4$

6. （多选）若实数 $a \ge 2$，则下列不等式中一定成立的是（ABD.

A. $(a+1)^{a+2} > (a+2)^{a+1}$ ✓　　B. $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$ ✓

C. $\log_a(a+1) < \frac{a+1}{a}$ ×　　D. $\log_{a+1}(a+2) < \frac{a+2}{a+1}$ ✓

$\log_a a+1$　$\log_a a^{\frac{a+1}{a}}$　　$\log_{a+1}(a+2)$　$\log_{a+1}(a+1)^{\frac{a+2}{a+1}}$

$a+1$　$a^{\frac{a+1}{a}}$

$(a+1)^a$　a^{a+1}　$a \ge 2$　　$(a+2)^{a+1}$　$(a+1)^{a+2}$

$3^2 > 2^3$　　$4^3 < 3^4$

$4^3 < 3^4$　　$5^4 < 4^5$

切线放缩.

7. 已知实数 a, b 分别满足 $e^a = 1.05$，$\ln(b+1) = 0.05$，且 $c = \frac{1}{21}$，则（ D ）

$<b$　ln5　1.0304

A. $a < b < c$　　B. $\cancel{b<} a < c < b$　C. $b < c < a$　　D. $c < a < b$

$e^a > a+1$

$\therefore a < 0.05$

$b > 0.05 = \frac{1}{20}$

$c = \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$

令 $x = \frac{1}{20}$

$a = \ln x+1$　$c = \frac{x}{x+1}$　　$a = \ln\frac{21}{20} > 1 - \frac{20}{21} = \frac{1}{21}$

$a-c = \ln x+1 - \frac{x}{x+1}$　　$\therefore b > a > c.$

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

↗ $(0, +\infty)$ ↗，$\therefore a > c.$

$10a = e^{0.1}$　$10b = \frac{10}{9}$　ln

【高考真题】

8. 设 $a = 0.1e^{0.1}, b = \frac{1}{9}$，$c = -\ln 0.9$，则（ C ）

xe^x　$\frac{x}{1-x}$　$c < b.$

A. $a < b < c$　　B. $c < b < a$　　C. $c < a < b$　　D. $a < c < b$

令 $x = \frac{1}{10}$　$a = xe^x$

$c = -\ln(1-x)$

$a = xe^x$

$b = \frac{x}{1-x}$

令 $g(x) = (x+1)^2 e^x - 1$

$g'(x) = 2(x+1)e^x + (x-1)^2 e^x$

$= (x^2-1)e^x < 0$

$g(x) \downarrow.$

$a-b = x\left(e^x + \frac{1}{x-1}\right)$

$\therefore f(x) \downarrow.$　$f(x) < 0$

$\therefore a < b.$

令 $f(x) = e^x + \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{(x-1)^2}$ ↗ $x=0$ 时 $f(x) = 0$

$= \frac{e^x(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$