1° 找中间量
2° 找单调性
3° 画图 作差 作商（保证正数）

高三数学第二轮复习讲义（40）

利用函数单调性比较大小及抽象函数研究

班级 14 姓名 张姝妍

【复习目标】

能利用函数的单调性，结合奇偶性，对称性比较大小，能利用特殊化的思想将抽象函数问题具体化，从而研究一些抽象函数的性质

【基础训练】

找中间量

1.若 $a=4.2^{-0.3}, b=4.2^{0.3}, c=\log_{4.2}0.2$，则 a,b,c 的大小关系为（B）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

$b>a>c$

单调性

2. 已知函数 $f(x)=2x-\sin x$，则下列选项正确的是（D）

A. $f(e)<f(\pi)<f(2.7)$　　B. $f(\pi)<f(e)<f(2.7)$

C. $f(e)<f(2.7)<f(\pi)$　　D. $f(2.7)<f(e)<f(\pi)$

3.设 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则（C）

$\log_3 4>1$

A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$　　B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$　　D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

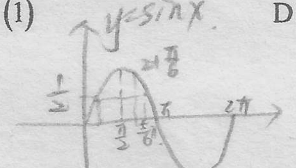
$0<2^{-\frac{3}{2}}<2^{-\frac{2}{3}}<1<\log_3 4$

4. 已知 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则（B）

$f(0)=\sin\frac{\pi}{6}$　$f(1)=\sin(2+\frac{\pi}{6})$　$f(2)=\sin(4+\frac{\pi}{6})$

A. $f(2)<f(1)<f(0)$　　B. $f(2)<f(0)<f(1)$

C. $f(0)<f(2)<f(1)$　　D. $f(1)<f(2)<f(0)$



比较 $2+\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{5}{6}\pi$　$=2-\frac{2}{3}\pi=\frac{6-2\pi}{3}<0$　$\therefore 2+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$

$\sin(4+\frac{\pi}{6})<0$

【例题探究】

1.（多选）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(y)=f(xy)+|x|+|y|$，则（AC）

A. $f(0)=1$　　B. $f(1)=-1$　　C. $f(x)$ 是偶函数　　D. $f(x)$ 是奇函数

$f(-1)f(0)=f(0)+1$　$\therefore f(0)=1$　$f(1)=2$

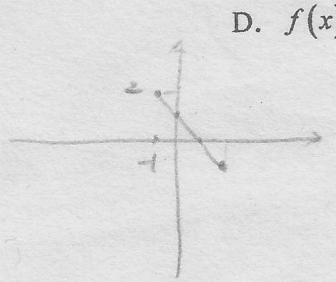
$f(0)f(1)=f(0)+1$　$f(0)^2=f(0)$　$f(0)=0$ 或 $f(0)=1$　$f(1)=2$

$f(x)f(0)=f(0)+|x|$　$f(x)=|x|+1$

2.（多选）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，对任意实数 x，y 满足：$f(x-y)=f(x)-f(y)+1$ 且 $f(1)=0$，当 $x>0$ 时，$f(x)<1$．则下列选项正确的是（ACD）

A. $f(0)=1$　　B. $f(2)=-2$

C. $f(x)-1$ 为奇函数　　D. $f(x)$ 为 R 上的减函数



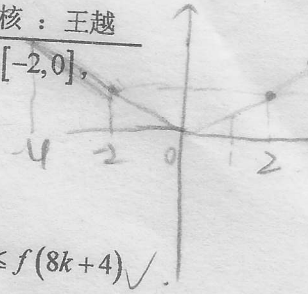
$f(1-0)=f(1)-f(0)+1$　$0=0-f(0)+1$　$f(0)=1$　$f(-1)=2$

$f(2)=f(1-(-1))=f(1)-f(-1)+1=0-2+1=-1$

$f(2)=1.$

3.（多选）已知偶函数 $f(x)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(4-x)+f(x)=2$，且任取 $x_1,x_2\in[-2,0]$，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0\ (x_1\neq x_2)$，以下结论中正确的是（ BD ）

$(2,1)$



A. $f(0)=0$

B. $f(0)<f(-3)$ ✓

C. $\sum_{i=0}^{63} f(i)=0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$，$f(8k)\le f(x)\le f(8k+4)$ ✓

模拟函数.

4.（多选）已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 R 上的非常数函数，满足 $f(x+2)+g(x-1)=3$，$f(x)+g(1-x)=3$，且 $f(x+1)$ 为奇函数，则（ BCD ）

$g(t)=3-f(t+3)$. $=3\times2024=6072.$

A. $f(x)$ 为奇函数

对称中心 $(1,0)$

$f(1)=0.$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=0$

D. $\sum_{k=1}^{2024} g(k)=6072$

$f(x+1)=3-g(x-2)$

$f(x+1)=3-g(2-x).$

$f(-x+1)=3-g(-x-2).$

$=g(x-2)-3.$

$g(x-2)+g(-x-2)=6.$

$(-2,3)$

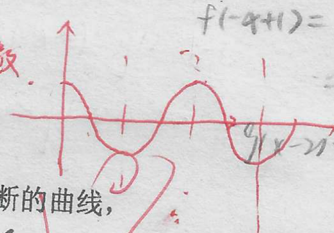
$f(t+3)+g(t)=3$

$f(1-t)+g(t)=3$

$f(t+3)=f(1-t).$

$f(x)$ 关于 $x=2$ 对称.

模拟函数.



$\dfrac{f(xy)}{xy}=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(y)}{y}+2$

5.（多选）函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象是一条连续不断的曲线，$f(xy)=yf(x)+xf(y)+2xy$，$f(\mathrm{e})=-\mathrm{e}^2$，则（ AC ）

A. $f(-1)=2$

$f(1)=-2.$

令 $x=-1$，$y=-1$　$f(-1)=2.$

$f(e)=\dfrac{e-4}{e}$

令 $y=-1.$

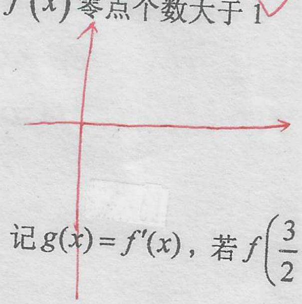
$f(-x)=f(x)+xf(-1)-2x$

$=-f(x)$

B. $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

C. $f(x)$ 是奇函数

D. $f(x)$ 零点个数大于 1 ✓



$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{2e-6}{e^2}$

$f\left(\dfrac{1}{e^4}\right)=\dfrac{4x}{e^4}$

【当堂训练】

（多选）已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则（ ~~ABC~~ ）

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

$h(x)=f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$

$h(-x)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$

$\therefore$ 对称轴 $x=\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)$

$g\left(x+\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}-x\right)$. 关于对称　$\left(\frac{3}{2},0\right)$　$T=2$

$g(2+x)=g(2-x)$　即 $f(2+x)=-f(2-x)+C.$