高三数学第二轮复习讲义（38）
运用函数思想处理最值与范围问题

班级 14　姓名 张姝妍

【复习目标】

1. 通过转化利用几何性质或构建函数用代数方法解决几何图形中的最值问题；
2. 化归为函数的值域问题或构建不等式等解决范围问题．

【课前检测】

1. 已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一个动点，Q 为圆 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$ 上一个动点，那么点 P 到点 Q 的距离与点 P 到抛物线的准线的距离之和的最小值是 4 ．

2. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$，$F$ 是双曲线 C 的右焦点，点 A 是双曲线 C 的左支上的一点，点 B 为圆 $D:x^2+(y+3\sqrt{2})^2=3$ 上一点，则 $|AB|+|AF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}+\sqrt{3}$．

【例题探究】

$S=\frac{1}{2}PQ\cdot PR$
$=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\,|y_Q|\cdot\sqrt{1+(-\frac{1}{m})^2}\,|3m|$

例 1. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，过点 $P(-3,0)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2，l_1 与 C 相交于两个不同点 A,B，在线段 AB 上取点 Q，满足 $\dfrac{|AQ|}{|QB|}=\dfrac{|AP|}{|PB|}$，直线 l_2 交 y 轴于点 R，求 ΔPQR 面积的最小值．

(1) 解：由题意可知 l_1 斜率不为 0，设 l_1：$x=my-3$．

$\because l_1\perp l_2$

$\therefore l_2$ 斜率为 $k_2=-\frac{1}{m}$．

又过点 $P(-3,0)$．

$\therefore x=-\frac{1}{m}y-3$

令 $x=0$，$y=-3m$

$\because \frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}$ 设 $=\lambda$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$
$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$

设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $Q(x_0,y_0)$

$\begin{cases}(x_0-x_1,y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)\\(-3-x_1,-y_1)=-\lambda(x_2+3,y_2)\end{cases}$

$y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}$

$\begin{cases}x^2+2y^2-8=0\\x=my-3\end{cases}$

$(m^2+2)y^2-6my+1=0$

$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{6m}{m^2+2}\\y_1y_2=\frac{1}{m^2+2}\end{cases}$

$\therefore y_0=\frac{1}{3m}$

$\therefore S=\frac{1}{2}PQ\cdot PR$
$=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\left|\frac{1}{3m}\right|\cdot|3m|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{m^2}+m^2+1}\geq 1$　当且仅当 $m=\pm1$ 时取“=”

综上：ΔPQR 面积最小为 1

例 2.设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$D(p,0)$，过F的直线交C于M,N两点.当直线MD垂直于x轴时，$|MF|=3$.

（1）求C的方程；

$\tan(\alpha-\beta)$

（2）设直线MD,ND与C的另一个交点分别为A,B，~~记直线MN，AB的倾斜角分别为α,β.当$\alpha-\beta$取得最大值~~时，求直线AB的方程.

(1)解：$\because |MF|=3$

$\therefore p+\frac{p}{2}=3$

$p=2$

$\therefore y^2=4x$

综上：C的方程为$y^2=4x$

(2)解：设MN：$x=my+1$

$M(x_1,y_1)$　$N(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=2px=4x\end{cases}$$

$y^2-4my-4=0$ (1)

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=4m\\ y_1y_2=-4\end{cases}$$

设MA　$x=ny+2$

$$\begin{cases}ny+2=x\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ny-8=0$$

$y_3y_4=-8$

$\therefore y_3=-\frac{8}{y_1}$

$\therefore A\left(\frac{16}{y_1^2},-\frac{8}{y_1}\right)$

$\therefore B\left(\frac{16}{y_2^2},-\frac{8}{y_2}\right)$

$k_{AB}=\frac{-y_1y_2}{2(y_1+y_2)}=\frac{1}{2m}=\tan\beta$

若设为 求AB过定点

$k_{AB}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{y_3-y_4}{\frac{1}{4}(y_3^2-y_4^2)}$

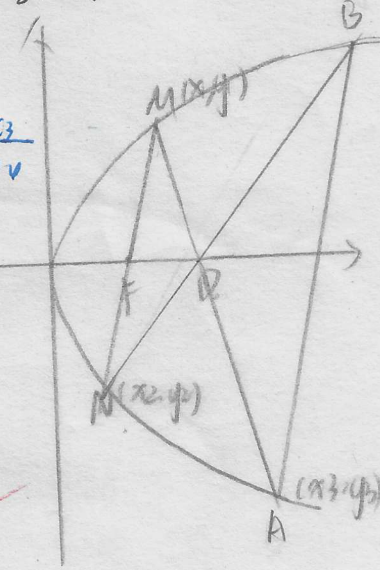
直线AB　$y-y_3=\frac{4}{y_3+y_4}(x-x_3)$

$y=\frac{4}{y_3+y_4}x+y_3-\frac{4x_3}{y_3+y_4}$

$=\frac{4}{y_3+y_4}x+\frac{y_3\cdot y_4}{y_3+y_4}$

$y_3=-\frac{8}{y_1}$

$y_4=-\frac{8}{y_2}$



M，D，A共线

$\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_3-y_1}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}$

$\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{4}{y_3+y_1}$

$y_1y_3=-8$

【课堂小结】

$\tan\alpha=\frac{1}{m}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m}{1+2m^2}$

1° $m=0$时　$\tan(\alpha-\beta)=0$

2° $m>0$时　$\tan(\alpha-\beta)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$　当且仅当$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取"="

3° $m<0$时，$\alpha-\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$\therefore \alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\tan(\alpha-\beta)<0$

$\therefore \alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

$\therefore k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

由(1)可化为　$y^2-2\sqrt{2}y-4=0$

$\Rightarrow y_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}$　$y_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\therefore A\left(\frac{16}{y_1^2},-\frac{8}{y_1}\right)$ 可求

$\left(\frac{4}{2-\sqrt{3}},\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)$

$=(8+4\sqrt{3},2\sqrt{6}+2\sqrt{2})$

$y-y_A=k_{AB}(x-x_A)$

$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}$

综上：AB方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}$