高三数学第二轮复习讲义（37）

运用等价转化思想处理角度问题

班级 14　学号 05　姓名 张姝妍

【专题分析】

结合图形将角度转化为斜率等，与交点坐标联系起来，将“形”落实为“数”，方便解题。

【课前预习】

1．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=3|F_2B|$，$5|AB|=4|BF_1|$，则 C 的方程为（ A ）

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

2．在平面内，A，B 是两个定点，C 是动点，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，则点 C 的轨迹为（ A. ）

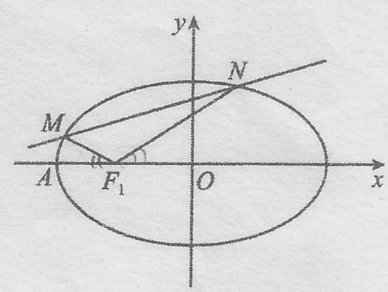
A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．直线

【例题探究】

例 1．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，$|F_1F_2|=4$，过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点，ΔPQF_1 的周长为 $8\sqrt{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）如图，点 A，F_1 分别是椭圆 C 的左顶点、左焦点，直线 m 与椭圆 C 交于不同的两点 M、N（M、N 都在 x 轴上方）．且 $\angle AF_1M=\angle OF_1N$．证明：直线 m 过定点，并求出该定点的坐标．



(1) 解：$\because |F_1F_2|=4$

$\therefore 2c=4$

$c=2$

$C_{\Delta PQF_1}=4a=8\sqrt{2}$

$a=2\sqrt{2}$.

$\because a^2=b^2+c^2$

$\therefore b^2=4$　$b=2$.

$\therefore C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$　$x^2+2y^2=8$.

(2) 解．$\because c=2$ $\therefore F_1(-2,0)$.

设 $M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$.

① 当 m 斜率存在时：

设 m: $y=kx+b$.

$\begin{cases} y=kx+b \\ x^2+2y^2-8=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-8=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-4kb}{2k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{2b^2-8}{2k^2+1} \end{cases}$

$\Delta=(4kb)^2-4(1+2k^2)(2b^2-8)>0$.

$\because \angle AF_1M=\angle OF_1N$

$\therefore k_{NF_1}+k_{MF_1}=0$

$k_{NF_1}=\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{kx_2+b}{x_2+2}$

$k_{MF_1}=\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{kx_1+b}{x_1+2}$

$\because k_{NF_1}+k_{MF_1}=0$

$\therefore \dfrac{kx_1+b}{x_1+2}+\dfrac{kx_2+b}{x_2+2}=0$

$2kx_1x_2+(2k+b)(x_1+x_2)+4b=0$.

$b=4k$.

$\therefore y=kx+4k$

$=k(x+4)$

$\therefore$ 过定点 $(-4,0)$.

② 当 m 斜率不存在时.

$\because$ M、N 都在 x 轴上方

故舍.

综上：过定点 $(-4,0)$.

同构思想

$[(x+2)-2]^2+2y^2=8$.

$(x+2)^2+2y^2-4(x+2)-4=0$

设线 MN,

$m(x+2)+ny=1$

确保1的代换.

凑成二次

$(x+2)^2+2y^2-4(x+2)[m(x+2)+ny]-4[m(x+2)+ny]^2=0$

$(1-4m-4m^2)(x+2)^2+(2-4n^2)y^2+(-4n-8mn)(x+2)y=0$

$(2-4n^2)\left(\dfrac{y}{x+2}\right)^2-(4n+8mn)\dfrac{y}{x+2}+(1-4m-4m^2)=0$.

$\dfrac{4n+8mn}{2-4n^2}=0$.

$n=0$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$

1° $n=0$ 时 $m(x+2)=1$.

2° $m=-\dfrac{1}{2}$ 时 $-\dfrac{1}{2}(x+2)+ny=1$ 过定点 $(-4,0)$

例 2．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 4，且 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

(1) 求 C 的标准方程；

(2) 设 C 的右焦点为 F，经过点 $P(3,0)$ 且斜率非零的直线与 C 交于 M,N 两点，且 M 在线段 PN 上．

（i）证明：直线 FM,FN 的斜率之和为 0；

（ii）若 $\angle FMN=5\angle FNM$，求直线 MN 的斜率．

(1)解. $2c=4$

$c=2$.

$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore a=\sqrt{6}$

$\because a^2=c^2+b^2$

$\therefore b^2=2 \quad b=\sqrt{2}$

$\therefore C: \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(2)解: (i) 设 $M(x_1,y_1)$ $F(2,0)$

$N(x_2,y_2)$.

$\because$ PN斜率不为0

$\therefore$ 设PN: $x=my+3$.

$$\begin{cases} x^2+3y^2-6=0. \\ x=my+3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (m^2+3)y^2+6my+3=0$.

$$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-6m}{m^2+3} \\ y_1y_2=\dfrac{3}{m^2+3} \\ \Delta>0. \end{cases}$$

【课堂小结】

$k_{FM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_1}{my_1+1}$

$k_{NF}=\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_2}{my_2+1}$ ∴得证.

$\therefore k_{FM}+k_{NF}=\dfrac{y_1}{my_1+1}+\dfrac{y_2}{my_2+1}=\dfrac{2my_1y_2+(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}=0.$