高三数学第二轮复习讲义（36）
运用参数思想处理定值、定点、定线问题

班级 14 姓名 张[illegible]

【复习目标】

圆锥曲线中的定点、定值问题是高考的考查热点、重点。

1. 定值问题多通过引入恰当的参数表示对象，联系具体条件产生等量关系消元达成。

2. 定点、定线问题多需将直线、曲线整理成特定形式，有时也会借助对称性找出定点目标位置然后证明结论。

3. 定点、定值问题的处理需特别关注题中几何量与参数关系，此外也常用特殊到一般的思想方法解决此类问题。

【例题探究】

例 1．在平面直角坐标系 xoy 中，设椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆 C 上，连结 PF_1、PF_2，并延长分别交椭圆 C 于点 A,B．已知 ΔAPF_2 的周长为 $8\sqrt{2}$，ΔF_1PF_2 面积的最大值为 4．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）当 P 不是椭圆的顶点时，试分析直线 OP 和直线 AB 的斜率之积是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由． (2)解：

(1)解：$\because C_{\triangle APF_2}=AF_1+AF_2+PF_1+PF_2$ $\therefore bc=4$

$=2a\times 2=8\sqrt{2}$ $\because a^2=b^2+c^2$

$\therefore a=2\sqrt{2}$ $\therefore \Rightarrow b=2\ \ c=2$

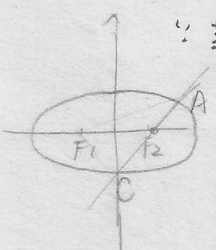
设 $P(x_0,y_0)$． $\therefore C:\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x^2}{4}=1$

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\cdot F_1F_2\cdot|x_0|$

$=c\cdot|x_0|$．

$\because$ 当 $|x_0|=b$ 时，$S_{\triangle F_1PF_2\max}=4$

见附页



例 2．已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，过 F_2 的直线 l 交椭圆 E 于 A,B 两点，$\triangle ABF_1$ 的周长为 8.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)过点 F_2 且与 l 垂直的直线与椭圆 E 相交于 C,D 两点，A,C 在 x 轴的上方，M,N 分别为线段 AB，线段 CD 的中点．证明：直线 MN 恒过定点，并求出该定点的坐标．

(1)解：$F_1B+AB+AF_1=4a=8$

$a=2$

$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore c=1$

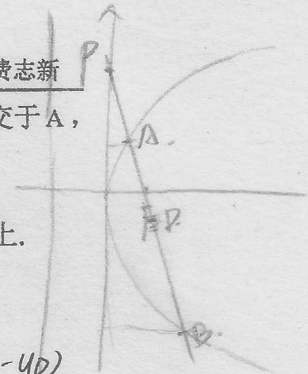
$\because a^2=b^2+c^2$

$\therefore a^2=4\ \ b^2=3$

$\therefore E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

见附页

(2)解：



例 3. 设抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为$F$，过点$P\left(0,4\right)$的动直线$l$与抛物线$C$交于A，$B$两点，当$F$在$l$上时，直线$l$的斜率为$-2$.

（1）求抛物线的方程；

消λ.

（2）在线段AB上取点D，满足$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$，证明：点$D$总在定直线上.

(1)解：∵当F在l上时，l斜率为-2

过点$(0,4)$

∴ $y=-2x+4$.

令$y=0$　$x=2$.

∴$F(2,0)$.

∴$y^2=8x$.

综上：抛物线方程为 $y^2=8x$

(2)解：设l斜率为k.　设$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

①当k不存在时

l: $x=0$　与C交于点$(0,0)$.

不符合题意，舍去

②当k存在时.

l: $\begin{cases} y=kx+4 \\ y^2=8x \end{cases}$

$\Rightarrow k^2x^2+(8k-8)x+16=0$.

$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-(8k-8)}{k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{16}{k^2} \end{cases}$

$\Delta>0$.

消λ.

∵ $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$　更简单（横坐标）$\lambda=\frac{x_1}{x_2}$.

∴ $(x_1, y_1-4)=\lambda(x_2, y_2-4)$.

∴ $x_1=\lambda x_2$

∵ $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$

∴ $(x_0-x_1, y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0)$

∴ $x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)$

∴ $x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{4}{1-k}$

∵ $y_0=kx_0+4$

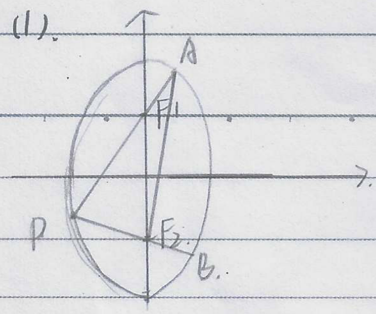
∴ $y_0=\dfrac{4}{1-k}$

∴ $x_0=y_0$

∴ D在定直线 $y=x$ 上.

【课堂小结】 $\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$

例(1).



(2). 设 $P(x_0, y_0)$, $F_1(0,2)$.

∴直线 PF_1 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$

$$\begin{cases} y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2 \\ 2x^2+y^2-8=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (3-y_0)x^2+x_0(y_0-2)x-x_0^2=0$.

∴ $x_0 x_A=\frac{-x_0^2}{3-y_0}$

∴ $x_A=\frac{x_0}{y_0-3}$ ∴ $y_A=\frac{3y_0-8}{y_0-3}$ ∴ $A\left(\frac{x_0}{y_0-3}, \frac{3y_0-8}{y_0-3}\right)$

$F_2(0,-2)$.

∴直线 PF_2 $y=\frac{y_0+2}{x_0}x-2$

$$\begin{cases} y=\frac{y_0+2}{x_0}x-2 \\ 2x^2+y^2-8=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (y_0+3)x^2-x_0(y_0+2)x-x_0^2=0$

∴ $x_0 x_B=\frac{-x_0^2}{y_0+3}$

∴ $x_B=\frac{-x_0}{y_0+3}$ $y_B=\frac{-3y_0-8}{y_0+3}$ ∴ $B\left(\frac{-x_0}{y_0+3}, \frac{-3y_0-8}{y_0+3}\right)$

∴ $k_{AB}=\dfrac{\frac{3y_0-8}{y_0-3}+\frac{3y_0+8}{y_0+3}}{\frac{x_0}{y_0-3}+\frac{x_0}{y_0+3}}=\dfrac{(3y_0-8)(y_0+3)+(3y_0+8)(y_0-3)}{x_0(y_0+3)+x_0(y_0-3)}=\dfrac{6y_0^2-48}{2x_0y_0}=\dfrac{3y_0^2-24}{x_0y_0}$

$=-\dfrac{6x_0}{y_0}$

∵ $k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}$ ∴ $k_{AB}\cdot k_{OP}=-6$. ∴乘积为-6.为定值.

例(2).

(2)解：设 l： $x=my+1$　设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$.

$$\begin{cases} x=my+1 \\ 3x^2+4y^2-12=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (3m^2+4)y^2+6my-9=0.$

$$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4} \\ y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4} \end{cases}$$

$\therefore x_1+x_2 = my_1+1+my_2+1$

$= \dfrac{-6m^2}{3m^2+4}+2.$

$\because$ M为AB中点

$\therefore M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\dfrac{4}{3m^2+4},\ \dfrac{-3m}{3m^2+4}\right).$

$\because AB\perp CD$

$\therefore CD$： $x=-\dfrac{1}{m}y+1$　将 $-\dfrac{1}{m}$ 代替 m 得

同理可得 N：$\left(\dfrac{4m^2}{4m^2+3},\ \dfrac{3m}{4m^2+3}\right).$

$$\therefore k_{MN}=\frac{\dfrac{3m}{4m^2+3}+\dfrac{3m}{3m^2+4}}{\dfrac{4m^2}{4m^2+3}-\dfrac{4}{3m^2+4}}=\frac{7m(m^2+1)}{4(m^4-1)}=\frac{7m}{4(m^2-1)}$$

$\because$ 直线MN过点 $M\left(\dfrac{4}{3m^2+4},\ \dfrac{-3m}{3m^2+4}\right)$

$$\therefore\ y+\frac{3m}{3m^2+4}=\frac{7m}{4(m^2-1)}\left(x-\frac{4}{3m^2+4}\right)$$

$$y=\frac{7m}{4(m^2-1)}x-\frac{4}{3m^2+4}\times\frac{7m}{4(m^2-1)}-\frac{3m}{3m^2+4}$$

$$=\frac{7m}{4(m^2-1)}x-\frac{m}{m^2-1}$$

$$=\frac{m}{m^2-1}\left(\frac{7}{4}x-1\right)$$

若能发现在 x 轴上，则可令 $y=0$

$\therefore$ 过定点 $\left(\dfrac{4}{7},0\right).$