高三数学第二轮复习讲义（35）

运用等价转化思想处理面积相关问题

班级 14　姓名 张姝妍

【复习目标】

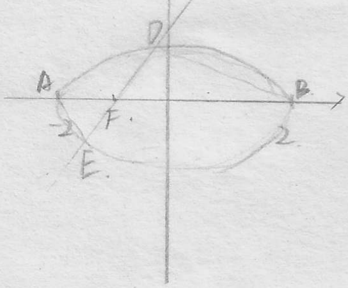
直线与圆锥曲线构成的面积问题中除了联立方程代数运算外，多关注图形注重几何性质的转化，数形结合的解决问题。

【例题探究】

1. 已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，且椭圆 C 过点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

（1）求 C 的方程；

（2）过左焦点 F 的直线 l 交椭圆 C 于 D，E 两点（其中点 D 在 x 轴上方），试求 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}}$ 的取值范围.（其中 $S_{\triangle AEF}$ 与 $S_{\triangle BDF}$ 分别表示△ AEF 和 $\triangle BDF$ 的面积）



(1)解：∵ A、B 为左右顶点

∴ $a=2$

∵ 过 $C(1,\frac{3}{2})$

∴ $b^2=3$.

∴ C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)解：∵ $a=2$，$b=3$

$a^2=b^2+c^2$

∴ $c=1$.

∴ $F(-1,0)$. 设 D(x_1,y_1) E(x_2,y_2).

由题可知 l 斜率不为0.

设 l：$x=my-1$

∴ $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AF\cdot|y_2|}{\frac{1}{2}\cdot BF\cdot|y_1|}=\frac{|y_2|}{3|y_1|}=\frac{-y_2}{3y_1}$

$\begin{cases}x=my-1\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}\Rightarrow(3m^2+4)y^2-6my-9=0.$

$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}\\y_1\cdot y_2=\frac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$

① $\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=\frac{y_2}{y_1}+\frac{y_1}{y_2}+2=\frac{-4m^2}{3m^2+4}$

令 $\frac{y_2}{y_1}=t$　$t+\frac{1}{t}+2=\frac{-4m^2}{3m^2+4}$

消元.

$\frac{y_1+y_2}{y_1\cdot y_2}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=-\frac{2m}{3}$

$\frac{1}{y_1}=-\frac{2}{3}m-\frac{1}{y_2}$

$\frac{y_2}{y_1}=-\frac{2}{3}my_2-1=-\frac{2}{3}(x_2+1)-1=-\frac{2}{3}x_2-\frac{5}{3}$

∵ $x_2\in(-2,2)$

【变式联想】

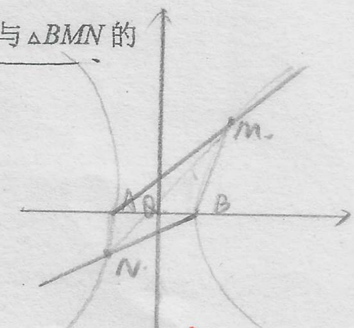
2．已知$A(-1,0)$，$B(1,0)$，平面上有动点P，且直线AP的斜率与直线BP的斜率之积为1.

(1) 解：设$P(x,y)$. $k_{AP}=\frac{y}{x+1}$ $k_{BP}=\frac{y}{x-1}$. ∵ $k_{AP}\cdot k_{BP}=1$ ∴ $\frac{y^2}{x^2-1}=1$. $x^2-y^2=1$. 综上：Ω：$x^2-y^2=1$ $(x\neq\pm1)$

（1）求动点P的轨迹Ω的方程.

（2）过点A的直线与Ω交于点M（M在第一象限），过点B的直线与Ω交于点N（N在第三象限），记直线AM，BN的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1=4k_2$.试判断$\triangle AMN$与$\triangle BMN$的面积之比是否为定值，若为定值，请求出该定值；若不为定值，请说明理由.

即仅是否过定点



①

AM: $y=k_1(x+1)$

$\begin{cases} y=k_1(x+1)\\ x^2-y^2-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow (1-k_1^2)x^2-2k_1^2x-k_1^2-1=0$

∴ $x_1+x_2=\frac{2k_1^2}{1-k_1^2}$

∵ 过点$(-1,0)$.

∴ $x_1=-1$ $x_2=\frac{k_1^2+1}{1-k_1^2}$

∴ $M(\frac{k_1^2+1}{1-k_1^2}, \frac{2k_1}{1-k_1^2})$

BN: $y=k_2(x-1)$.

$\begin{cases} y=k_2(x-1)\\ x^2-y^2-1=0\end{cases} \Rightarrow (1-k_2^2)x^2+2k_2^2x-k_2^2-1=0$

$x_3+x_4=\frac{-2k_2^2}{1-k_2^2}$

∵ $x_3=1$ ∴ $x_4=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-1}$

∴ $N(\frac{1+k_2^2}{k_2^2-1}, \frac{2k_2}{k_2^2-1})$.

∵ $k_1=4k_2$

∴ $M(\frac{-(16k_2^2+1)}{16k_2^2-1}, \frac{-8k_2}{16k_2^2-1})$

∴ $k_{MN}=\frac{\frac{2k_2}{k_2^2-1}-\frac{2k_1}{1-k_1^2}}{\frac{1+k_2^2}{k_2^2-1}-\frac{k_1^2+1}{1-k_1^2}}$

$=\frac{5k_2}{4k_2^2+1}$

$y-\frac{2k_2}{k_2^2-1}=\frac{5k_2}{4k_2^2+1}(x-\frac{k_2^2+1}{k_2^2-1})$

$y=\frac{k_2}{4k_2^2+1}(5x+3)$

∴ 过定点$(-\frac{3}{5},0)$.

∴ $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BMN}}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{1}{4}$

一点引双线

避[illegible]韦达定理

$k_{AM}=4k_{BN}$

$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{b^2}{a^2}=1$

∴ $k_{AM}\cdot k_{BM}=4k_{BN}k_{BM}=1$

∴ $k_{BN}\cdot k_{BM}=\frac{1}{4}$

$\frac{y_2}{x_1-1}\cdot\frac{y_1}{x_2-1}=\frac{1}{4}$.

∴ $\frac{4y_1y_2}{(my_1+b-1)(my_2+b-1)}=1$

$\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(b-1)(y_1+y_2)+(b-1)^2}=1$

∴ $\frac{(m^2-4)y_1y_2+m(b-1)(y_1+y_2)+(b-1)^2}{m^2y_1y_2+m(b-1)(y_1+y_2)+(b-1)^2}=0$

∴ $(m^2-4)y_1y_2+m(b-1)(y_1+y_2)+(b-1)^2=0$.

∴ $b=-\frac{3}{5}$

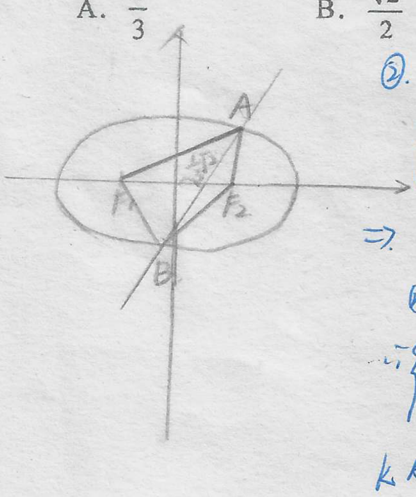
∴ $x=my-\frac{3}{5}$

过定点$(-\frac{3}{5},0)$.

【决胜高考】

3．已知椭圆$C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，直线$y=x+m$与C交于点A,B两点，若$\triangle F_1AB$面积是$\triangle F_2AB$的2倍，则$m=$（ C ）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$



②．设MN $x=my+b$.

设$M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$.

$\begin{cases} x=my+b\\ x^2-y^2=1.\end{cases}$

$\Rightarrow m^2y^2+2mby+b^2-y^2-1=0$.

$(m^2-1)y^2+2mby+b^2-1=0$.

∴ $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-2mb}{m^2-1}\\ y_1y_2=\frac{b^2-1}{m^2-1}\end{cases}$

$k_{AM}=\frac{y_1}{my_1+b+1}$

$k_{BN}=\frac{y_2}{my_2+b-1}$

∵ $k_{AM}=4k_{BN}$

∴ $\frac{y_1}{my_1+b+1}=\frac{4y_2}{my_2+b-1}$.

∴ $\frac{-5mb^2-8mb-3m}{m^2-1}-(5b+3)y_1=0$.

∴ $5b+3=0$

$b=-\frac{3}{5}$

∴ 当$y=0$时，$x=-\frac{3}{5}$恒成立.

∴ 恒过定点$(-\frac{3}{5},0)$.