高三数学第二轮复习讲义（31）
运用轨迹思想确定圆的方程

班级 14 姓名 张姝妍

【复习目标】

1．熟练掌握圆的常见轨迹形式.

【课前预习】

1．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 A：$(x-1)^2+y^2=1$，点 $B(3，0)$，过动点 P 引圆 A 的切线，切点为 T. 若 $PT=\sqrt{2}PB$，则动点 P 的轨迹方程为 （C）

A．$x^2+y^2-14x+18=0$　　B．$x^2+y^2+14x+18=0$

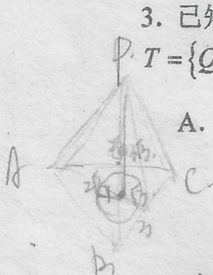
C．$x^2+y^2-10x+18=0$　　D．$x^2+y^2+10x+18=0$

2．已知圆 $C:(x-5)^2+(y+2)^2=r^2$，$r>0, A(-6,0), B(0,8)$，若圆 C 上存在点 P 使得 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，则 r 的取值范围为 （B）

以AB为直径的圆.

A．$(0,5]$　　B．$[5,15]$　　C．$[10,15]$　　D．$[15,+\infty)$

3．已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合，设集合 $T=\{Q\in S|PQ\le 5\}$，则 T 表示的区域的面积为 （B）



A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．π　　C．2π　　D．3π

4．(多选题)阿波罗尼斯发现：“平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $m\neq 1$ 的点的轨迹是圆”，人们将这个圆以他的名字命名为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆，在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0),B(4,0)$，点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$，设点 P 的轨迹为 C，则正确的是 （BD）

A．圆 C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=12$

B．轨迹圆 C 的面积为 16π

C．在 C 上存在 K 使得 $KO=2KA$

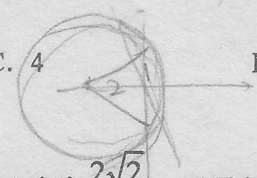
D．当A，B，P 三点不共线时，射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

【典型例题】

例 1.（1）阿波罗尼斯证明过一个命题：平面内到两定点距离之比为常数 $k(k>0,k\neq1)$ 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿氏圆，已知 P,Q 分别是圆 $C:(x-4)^2+y^2=8$，圆 $D:x^2+(y-4)^2=1$ 上的动点，O 是坐标原点，则 $|PQ|+\dfrac{\sqrt{2}}{2}|PO|$ 最小值是 $\underline{2\sqrt{5}-1}$.

(2). 已知 b 是 a,c 的等差中项，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点，则 AB 的最小值为　　(C)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$



例 2. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

（1）求 C 的方程；

（2）已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AP|\cdot|AR|=3$.

（i）设 $P(m,n)$，求 R 的坐标（用 m，n 表示）；

（ii）设 O 为坐标原点，Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PQ|$ 的最大值.

(1)解：$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$

$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$a^2=b^2+c^2$

$\therefore a^2=9b^2$

又 $\because \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$　$a>0,\ b>0$

$\therefore a=3,\ b=1$

$\therefore C:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1.$

【课堂小结】

2(i)解：$\because b=1$

$\therefore A(0,-1).$

$\overrightarrow{AP}=(m,\ n+1)$

设 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}$　$\lambda>0.$

$\therefore \overrightarrow{AR}=(m\lambda,\ (n+1)\lambda).$

$\because |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AR}|=3$

$\therefore \lambda m^2+\lambda(n+1)^2=3.$

$\therefore \lambda=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}$

$\therefore \overrightarrow{AR}=\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\ \dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}\right)$

$\therefore R=\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\ \dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$

(ii)解：$k_{OR}=\dfrac{n+1}{m}-\dfrac{m^2+(n+1)^2}{3m}$

$k_{OP}=\dfrac{n}{m}$

$\because k_{OR}=3k_{OP}$

2 $\therefore m^2+(n+4)^2=18.$

设 (x,y)　$D(0,-4).$

$x^2+(y+4)^2=9-9y^2+y^2+8y+16$

$=-8y^2+8y+25$　　$y\in[-1,1].$

$\therefore$ 当 $y=\frac{1}{2}$ 时 $[x^2+(y+4)^2]_{max}=27$

$\therefore PD=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\therefore |PQ|_{max}=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$