高三数学第二轮复习讲义（30）
运用几何特征研究几何体的外接球

班级 14　姓名 张婷婷

【复习目标】

熟练掌握常规的空间几何体的外接球计算问题.

【课前预习】

1．若正四面体的表面积为 $8\sqrt{3}$，则其外接球的体积为(A)

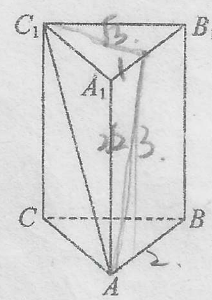
A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 12π　　C. $8\sqrt{6}\pi$　　D. $32\sqrt{3}\pi$

2．已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ A ）

A．100π　　B．128π　　C．144π　　D．192π

3．如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为（ D ）

A．2　B．$\sqrt{3}$　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　D．$\dfrac{\sqrt{30}}{3}$



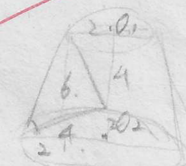
4．（多选）已知圆台上、下底面的圆心分别为 O_1，O_2，半径为 2，4，圆台的母线与下底面所成角的正切值为 3，P 为 O_1O_2 上一点，则（ B ）

A．圆台的母线长为 6

B．当圆锥的 PO_1 与圆锥 PO_2 的体积相等时，$PO_1=4PO_2$

C．圆台的体积为 56π

D．当圆台上、下底面的圆周都在同一球面上，该球的表面积为 80π



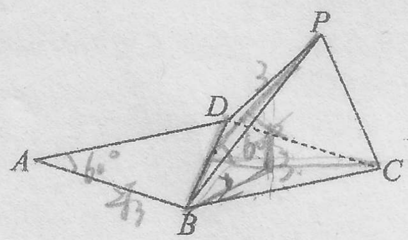
5. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=2$，$SA=SC=2\sqrt{2}$，二面角 $B-AC-S$ 的大小为 $\dfrac{5\pi}{6}$，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为（ C ）

A．$\dfrac{88\pi}{9}$　　B．$\dfrac{104\pi}{9}$　　C．$\dfrac{56\pi}{3}$　　D．$\dfrac{104\pi}{3}$

【典型例题】

例 1（1）.已知点 S,A,B,C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 ABC，则 $SA=$ ___2___.

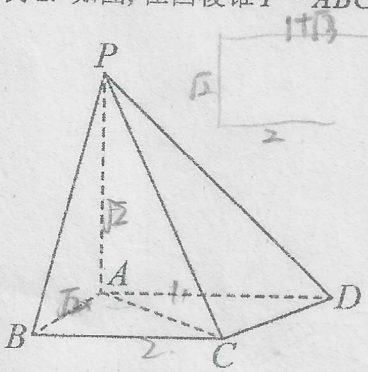
(2)如图：边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$，$\angle DAB=60^\circ$，将 ΔABD 沿 BD 折起到图中 ΔPBD 的位置，使得二面角 $P-BD-C$ 的大小为 60°，则三棱锥 $P-BCD$ 的外接球表面积等于 $\frac{52}{3}\pi$.



$r^2=\frac{4}{3}.\ 1+\frac{1}{3}$

$4\pi\ \frac{4}{3}.$

例 2. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD, BC//AD$.



(1)证明：∵PA⊥面ABCD

∴PA⊥AB

又∵AB⊥AD

AB∩AD=A.

AB.AD⊂面PAD

∴AB⊥面PAD

∵AB⊂面PAB

∴面PAB⊥面PAD.

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（2）设 $PA=AB=\sqrt{2}, BC=2, AD=1+\sqrt{3}$，且点 P，B，C，D 均在球 O 的球面上.

（i）证明：点 O 在平面 $ABCD$ 内；

（ii）求直线 AC 与 PO 所成角的余弦值.

(2)解：$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$

$\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$

设夹角为θ.

$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle|=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

∴AC与PO夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(2)(i)解：∵PA⊥面ABCD

∴PA⊥AB PA⊥AD

∵AB⊥AD

∴以AB.AD.AP所在直线分别为xyz轴建系.

∴ $B(\sqrt{2},0,0)$. $D(0,1+\sqrt{3},0)$

【课堂小结】 $P(0,0,\sqrt{2})$ $C(\sqrt{2},2,0)$.

设 $O(x,y,z)$

∵P.B.C.D.在球O的球面上. ∴PO=DO=BO=CO

$$\begin{cases}(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2\\ x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2+z^2\\ (x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-1-\sqrt{3})^2+z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=0.\end{cases}$$

∴O(0.1.0) ∴O在面ABCD内