高三数学第二轮复习讲义（29）
运用建系思维计算空间角与距离问题

班级 14　姓名 张姝妍

【复习目标】

通过建立坐标系求解空间角与距离时，直接相应的求解公式再作答即可.

【课前预习】

1.已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4, CC_1=2$，M,N 分别为 DB,A_1C_1 的中点，

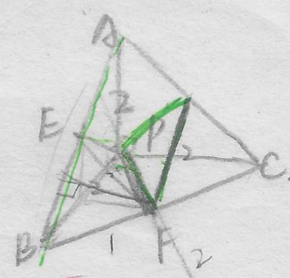
则(1)直线 A_1M 和 BN 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$；

(2)平面 A_1BC_1 与平面 $ABCD$ 所成夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$；

侧棱长为2

2．正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面都是直角三角形，E,F 分别是 AB,BC 的中点，则

（1）PB 与平面 PEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；



（2）点E到直线PF的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$；

（3）异面直线AB与PF之间的距离为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

可用几何法.

例2：(3) 几何法.

∵ D.E分别为PB.PA中点

∴ $DE \parallel \frac{1}{2}BA$

∴ $\triangle DGE \backsim \triangle AGB$

∴ $\frac{EG}{BG}=\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$

∴ $BG=\frac{2}{3}BE$

同理可得 $BH=\frac{2}{3}BF$

∴ $\frac{BG}{BE}=\frac{BH}{BF}$

∴ $GH\parallel EF$

∵ $EF\parallel DO$

∴ $GH\parallel DO$.

∵ $DO\perp AO$

∴ $GH\perp AO$.

∵面ADO∩面ACO=AO. BF⊥AO. GH⊥AO. GH⊂面ADO. BF⊂面AOC.

∴ ∠GHF为二面角 D-AO-C的平面角

∵ $\angle GAB+\angle GHF=180^\circ$

∴ $\sin\angle GHF=\sin\angle BHG$

∵ $GH\parallel EF$

∴ $\angle GHB=\angle EFB$

∵ E.F为PA.CA中点

∴ $EF=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$

∵ $OF=\frac{1}{2}AB=1$

$OB=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$

∴ $BF=\sqrt{OF^2+OB^2}=\sqrt{3}$,

∵在△ABD中. $\cos\angle DBA=\frac{BD^2+AB^2-AD^2}{2BD\cdot AB}=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+2^2-(\frac{\sqrt{10}}{2})^2}{2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

∵在△ABP中.

$\cos\angle DBA=\frac{BP^2+AB^2-AP^2}{2BP\cdot AB}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow AP=\sqrt{14}$.

∴ $\cos\angle PAB=\frac{4+14-6}{2\cdot 2\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$

∵ $\cos\angle BAE=\frac{4+(\frac{\sqrt{14}}{2})^2-BE^2}{2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}}$

$\Rightarrow BE=\frac{\sqrt{6}}{2}$

∴ $\cos\angle EFB=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\sin\angle EFB=\sqrt{1-\cos^2\angle EFB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\sin\angle GHF=\frac{\sqrt{2}}{2}$

综上：二面角 D-AO-C的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

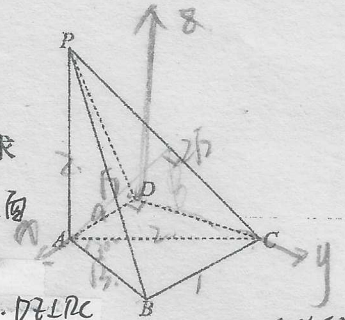
求BE 用向量法，

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BA})$

∴ $|\overrightarrow{BE}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BP}^2+\overrightarrow{BA}^2+2$

【典型例题】

例 1. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1, AB=\sqrt{3}$.



（1）若 $AD\perp PB$，证明：$AD//$ 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD .

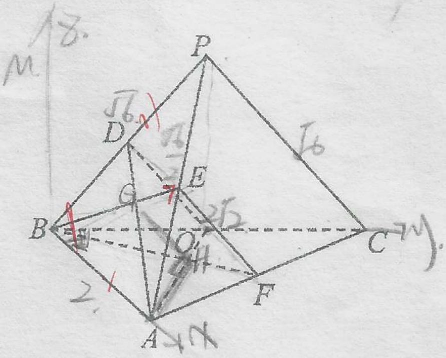
(1)证明：∵ $PA\perp$ 面 $ABCD$
∴ $PA\perp AC$　$PA\perp AB$
∵ $PA=AC=2$　$AB=\sqrt{3}$
∴ $PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2\sqrt{2}$
$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{7}$
∵ $BC=1$
∴ $BC^2+PB^2=PC^2$
∴ $\angle PBC=90^\circ$
∴ $BC\perp PB$

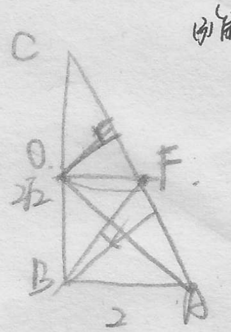
∵ $PA\perp$ 面 $ABCD$
∴ $PA\perp BC$　$PA\perp AD$
又∵ $DA\perp PB$
$PB\cap PA=A$
$PB、PA\subset$ 面 PBA
∴ $AD\perp$ 面 PAB
∵ $BC\perp PB$, $BC\perp PA$
$PB\cap PA=P$
$PB、PA\subset$ 面 PBA
∴ $BC\perp$ 面 PBA
∴ $DA//BC$
∵ $DA\not\subset$ 面 PBC，$BC\subset$ 面 PBC
∴ $DA//$ 面 PBC

(2)解：过 D 作 $DZ\perp$ 面 ADC
∴ $DZ\perp$ 面 ADC
∴ $DZ\perp DA$，$DZ\perp DC$
又∵ $AD\perp DC$
∴以 $DA、DC、DZ$ 所在直线分别为 x,y,z 轴建系.
设 $AD=a$　则 $CD=b$
∴ $A(a,0,0)$　$C(0,b,0)$
$P(a,0,2)$.
∴ $\overrightarrow{CP}=(a,-b,2)$.
$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.
$\overrightarrow{DC}=(0,b,0)$.

设面 ACP 的法向量为 $\vec{n_1}$
∴ $\begin{cases} ax_0-by_0+2z_0=0 \\ z=0 \end{cases}$
令 $y=1$. ∴ $\vec{n_1}=(b,a,0)$
设面 PCD 的法向量为 $\vec{n_2}$
$\vec{n_2}=(1,0,0)$
$\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2}$
$\sqrt{a^2+b^2}=2$
$\Rightarrow b=1$
$a=\sqrt{3}$.

例 2. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.





（1）证明：$EF//$ 平面 ADO；

（2）证明：平面 $ADO\perp$ 平面 BEF;

（3）求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.

证明：连接 OF.
$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$
$=\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{AC}$
$=(1-\lambda)\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{BC}$
∵ $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=0$　$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

∴ F 为 AC 中点
∵ O 为 BC 中点
∴ $OF\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AB$
∵ $D、E$ 为 $BP、AP$ 中点
∴ $DE\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AB$
∴ $DE\mathrel{\underline{\parallel}}OF$
∴四边形 $DEFO$ 为平行四边形
∴ $EF//DO$
∵ $EF\not\subset$ 面 ADO
$DO\subset$ 面 ADO
∴ $EF//$ 面 ADO

(2)证明：∵ $D、O$ 分别 $BP、BC$ 中点
∴ $DO=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$
∵ $AD=\sqrt{5}DO$
∴ $AD=\frac{\sqrt{30}}{2}$
∵ $AO=\sqrt{BO^2+AB^2}=\sqrt{6}$
∴ $AO^2+DO^2=AD^2$
∴ $AO\perp DO$
∵ $DO//EF$
∴ $AO\perp EF$
又∵ $AO\perp BF$　$EF\cap BF=F$
$EF、BF\subset$ 面 BEF
∴ $AO\perp$ 面 BEF
∵ $AO\subset$ 面 ADO
∴面 $ADO\perp$ 面 BEF

(3)解：过 B 作 $BM\perp$ 面 ABC.
∴ $BM\perp$ 面 ABC
∴ $BM\perp AB$　$BM\perp BC$
又∵ $AB\perp BC$
∴以 $BA、BC、BM$ 所在直线分别为 x,y,z 轴建系
设 $P(x,y,z)$　$D\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)$
$A(2,0,0)$　$C(0,2\sqrt{2},0)$.
∴ $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{x}{2}-2,\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)=\frac{\sqrt{30}}{2}$
$\overrightarrow{BP}=(x,y,z)=\sqrt{6}$
$\overrightarrow{CP}=(x,y-2\sqrt{2},z)=\sqrt{6}$
设 $z>0$.
∴ $\begin{cases}\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=\frac{30}{4} \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+(y-2\sqrt{2})^2+z^2=6\end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases}x=-1 \\ y=\sqrt{2} \\ z=\sqrt{3}\end{cases}$
∴ $P(-1,\sqrt{2},\sqrt{3})$
∴ $D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.　$O(0,\sqrt{2},0)$.
$\overrightarrow{AO}=(-2,\sqrt{2},0)$　$\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\overrightarrow{OC}=(0,\sqrt{2},0)$

设面 ADO 的法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$
∴ $\begin{cases}-2x+\sqrt{2}y=0 \\ -x-\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$
令 $x=1$　$\vec{n_1}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$
设面 AOC 的法向量为 $\vec{n_2}$
$\vec{n_2}=(0,0,1)$
设夹角为 θ.
$|\cos\theta|=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|$
$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot 1}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$
∴ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}$