

$$\cos(2\omega x + 2\varphi) = \cos(4x + \frac{5}{6}\pi)$$

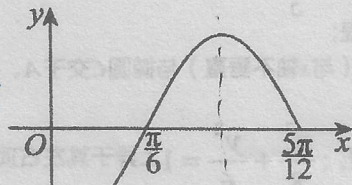
7. (多选题) 已知函数 $f(x) = \cos^4(\omega x + \varphi) - \sin^4(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图, 则

A. $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的零点之和为 $-\frac{5\pi}{12}$

D. 函数 $y = 4|f(x)| - \sqrt{4x - \frac{\pi}{6}}$ 的零点个数为 11 个

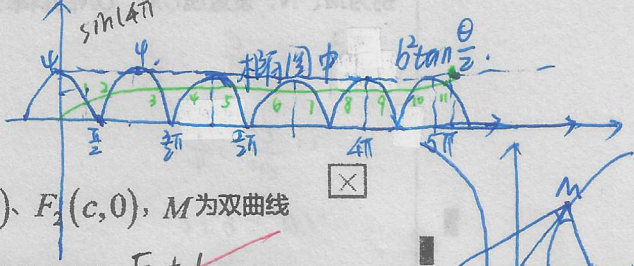


BCD
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\frac{c}{b} = \sqrt{3}$
 $\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4b^2 = a^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$

$$= 4|\cos(4x + \frac{5}{6}\pi)| - \sqrt{4x - \frac{\pi}{6}}$$

$$4|\cos t| - \sqrt{t} = 0$$

$$4|\cos t| = \sqrt{t}$$



二、填空题

8. 已知 O 为坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, M 为双曲线

右支上一点, 满足 $MF_1 \perp MF_2$, 且 $\triangle MOF_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, 则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3} + 1$.

9. 已知在底面边长为 $4\sqrt{3}$, 高为 4 的正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内有一个半径为 1 的小球, 该小球可以在正三棱柱内自由活动, 当任意旋转、晃动正三棱柱过程中小球至少与正三棱柱的一个面相切时, 小球球心的轨迹在正三棱柱的内部又会形成一个新的几何体, 则该几何体的体积为 $24\sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi$.

正三棱柱 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2 \times 4 \times 2 = 24\sqrt{3}$

$$S_{\triangle MOF_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = \frac{b^2}{\tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

三、解答题

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

10. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\cos A \cos C = \frac{\tan B}{\tan A + \tan C}$

(1) 求角 B ; (2) 当 $b = 2\sqrt{3}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为 S , 周长为 L , 求 $\frac{S}{L}$ 的取值范围.

解: $2\cos A \cos C \times (\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin C}{\cos C}) = \tan B$
 $\therefore 2\cos A \cos C (\frac{\sin A \cos C + \sin C \cos A}{\cos A \cos C}) = \frac{\sin B}{\cos B}$
 $\therefore 2\cos B = \frac{\sin B}{\cos B}$
 $\therefore \sin B \neq 0$
 $\therefore 2\cos B = 1$
 $\cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

$L = a + b + c = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\sin A + 4\sqrt{3}\sin C$
 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = 4\sqrt{3}\sin A \sin C$
 $\therefore \frac{S}{L} = \frac{2\sqrt{3}\sin A \sin C}{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\sin A + 4\sqrt{3}\sin C}$
 $\because A + C = \frac{2\pi}{3}$
 $A \in (0, \frac{\pi}{3}), C \in (0, \frac{\pi}{3})$
 $\therefore \frac{S}{L} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sin A + 2\sin C}$

找关系
余弦定理
 $\frac{S}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}ac}{a+c+2\sqrt{3}}$
 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$
 $\therefore ac = \frac{(a+c)^2 - 12}{3}$
 $\therefore \frac{S}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(a+c)^2 - 12}{3}}{(a+c) + 2\sqrt{3}}$
换元
 $\frac{S}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} [t^2 - 12]}{t + 2\sqrt{3}}$
平方
 $\frac{S}{L} \in (\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}]$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 F 作直线 l (与 x 轴不垂直) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 在直线 $x = 4$ 上取点 P , 使 $PA \parallel x$ 轴, 证明: 直线 PB 恒过定点;

(3) 设点 Q 为椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ 上异于其左右顶点的一点, 过 Q 分别作椭圆 C 的两条切线 QM, QN , 切点分别为 M, N , 设直线 QM, QN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 k_2$ 为定值.

① 解: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

∴ $y = \frac{y_1 y_2}{3 - m y_2} x + \frac{4 y_2 - y_1 - m y_1 y_2}{3 - m y_2}$

∴ $\frac{e^2}{a^2} = \frac{1}{4}$

∴ $a^2 = b^2 + c^2$

∴ $a^2 = \frac{4}{3} b^2$

∴ $b^2 = 3$

∴ $a^2 = 4$

∴ $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

② 解: 由题可知斜率不为 0, m 存在时 PB 为 x 轴.

∴ 设 $l: x = my + 1$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$\begin{cases} x = my + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$

$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4} \end{cases}$

∵ $PA \parallel x$ 轴, P 点横坐标为 4

∴ $P(4, y_1)$

∴ $k_{PB} = \frac{y_1 - y_2}{4 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{3 - m y_2}$

∴ $PB: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3 - m y_2} (x - x_2)$

过点 F 直线

$y - y_0 = k(x - x_0)$

理解

$\begin{cases} y = kx - (kx_0 - y_0) \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 - 8k(kx_0 - y_0)x + \dots$

$\Delta = 64k^2(kx_0 - y_0)^2 - 4(4k^2 + 3) \dots$

$\Rightarrow (kx_0 - y_0)^2 - 4k^2 - 3 = 0$

(∴ 求出关于 k 的方程, 其根为 k_1, k_2)

$(4 - x_0^2)k^2 + 2x_0 y_0 k - \dots$

∴ 关于 k 的方程有 2 解, 分别为 k_1, k_2

$\therefore k_1 \cdot k_2 = \frac{3 - y_0^2}{4 - x_0^2}$

$\therefore 6x_0^2 + 2y_0^2 - 48 = 0$

$x = \frac{x_2 y_1 - 4 y_2}{y_1 - y_2} = \frac{(m y_2 + 1) y_1 - 4 y_2}{y_1 - y_2}$

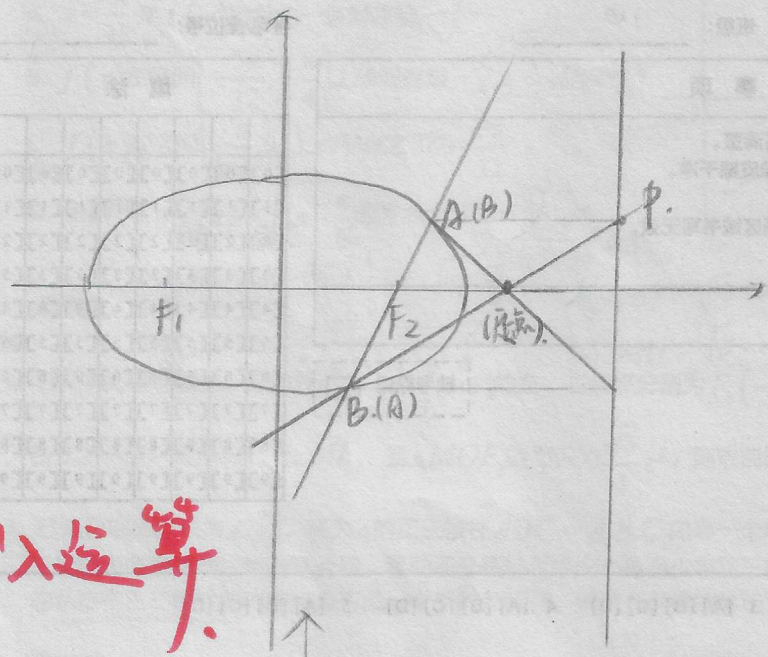
① 强行韦达定理, $\frac{m y_1 y_2 + y_1 + y_2}{(y_1 + y_2) - 2 y_2} = \frac{1}{2}$

② 降次, $\frac{y_1 x y_2}{y_1 + y_2} = \frac{3}{2m}$ ∴ $y_1 \cdot y_2 = \frac{3}{2m} (y_1 + y_2)$

$\rightarrow m \lambda \frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} = \frac{m y_1 y_2 + y_1 - 4 y_2}{y_1 - y_2}$ (强行韦达定理)

先求 P

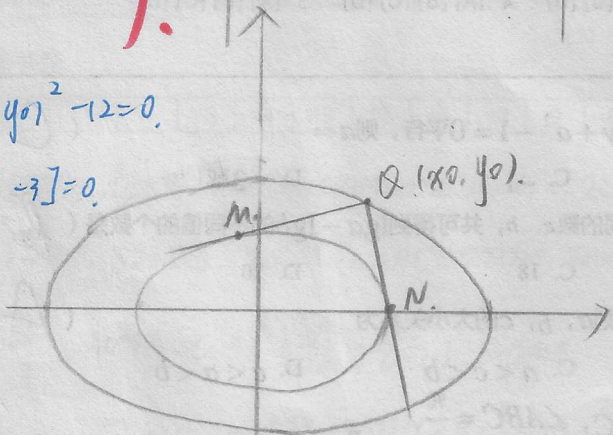
轻甲



代入运算

$$kx_0 - y_0^2 - 12 = 0$$

$$kx_0 - y_0^2 - 3 = 0$$



$$-y_0^2 = 0$$

关于k的方程 ☆

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$$

过点 $(\frac{5}{2}, 0)$