数学综合训练

姓名：张姝妍　　班级：14　　考场/座位号：

注意事项
1、答题前请将姓名、班级、考场、准考证号填写清楚。 2、客观题答案必须使用2B铅笔填涂，修改时用橡皮擦干净。 3、主观题使用黑色签字笔书写。 4、必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效。 5、保持卷面整洁、完整。
正确填涂 ▮　错误填涂 [✓] [×] [●] [/]

缺考标记 [ ]

填涂							
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

一、选择题

1 [A] [B] [C] [D]　2 [A] [B] [C] [D]　3 [A] [B] [C] [D]　4 [A] [B] [C] [D]　5 [A] [B] [C] [D]
6 [A] [B] [C] [D]

$z=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$　$i-1$

1. 已知复数z满足$(1-i)z=i$，则在复平面内复数z对应的点位于　B（~~A~~）

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. 已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，顶点到渐近线的距离为$\frac{c}{2}$，则离心率$e=$　（A）

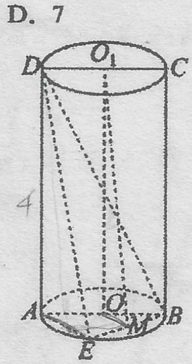
A. $\sqrt{2}$　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　C. $\sqrt[4]{2}$　D. 2

3. 已知$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的偶函数，且$f(4-x)=f(x)$，当$0\le x\le\frac{3}{2}$时，$f(x)=3-2x$，则$f(-2025)=$　（B）

A. -1　B. 1　C. 3　D. 7

4. 已知点M，N为圆$x^2+y^2-2y-3=0$上两点，且$|MN|=2\sqrt{3}$，点P在直线$\sqrt{3}x-y-5=0$上，点Q为线段MN中点，则$|PQ|$的最小值为　（B）

A. 1　B. 2
C. 3　D. 4



5.（多选）如图，矩形$ABCD$是圆柱OO_1的轴截面，$AB=2, AD=4$，E为$\overset{\frown}{AB}$的中点，M为BE的中点，则　（BCD）

A. 圆柱OO_1的侧面积为16π　8π

B. 三棱锥$B-ADE$的体积为$\frac{4}{3}$ ✓

C. 圆柱OO_1的外接球的表面积为20π ✓

D. O_1M//平面ADE ✓

6.（多选）已知抛物线E: $y^2=2px(p>0)$的焦点为F，抛物线E的准线交x轴于点G，抛物线E上一点$T(4,y_0)$到点F的距离为6，点A，B是抛物线E上的两点（异于原点O），则下列说法正确的是　（AB）

A. $p=4$ ✓　B. 若AB中点M的纵坐标为2，则直线AB的斜率为2

C. 若$OA\perp OB$，则直线AB恒过点$(4,0)$　D. 若直线AB过点F，则直线AG，BG的斜率之和为0

$G(-2,0)$．(x_1,y_1) (x_2,y_2)　$y^2=8x$.

$\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}$　$x=my+2$

$=\frac{y_1}{my_1+4}+\frac{y_2}{my_2+4}$　$y^2=8my+16$.

$=\frac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+4my_1+4y_2+16}$　$y^2-8my-16=0$.

$=0$.

二、填空题

7. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_3=8,S_6=24$，则$S_{12}=$ ___120___.

8. 已知曲线$y=x+\ln x$在点$(1,1)$处的切线与曲线$y=x^2-2x-a$相切，则$a=$ ___-3___.

$1+\frac{1}{x}$　　$y-1=2(x-1)$
$y=2x-1$

三、解答题

						13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

9. 人工智能技术（简称AI技术）已成为引领世界新一轮科技革命和产业改革的战略性技术，并迅速在各行各业中得到应用和推广，教育行业也不例外. 某市教体局为调查本市中学教师使用AI技术辅助教学的情况，随机抽取了该市120名中学教师，统计了他们一周内使用AI技术帮助制作课件的情况，并将一周内使用AI技术帮助制作课件的节次不少于4次的认定为喜欢使用AI技术，否则认定为不喜欢使用AI技术，经统计得到如下列联表.

年龄	是否喜欢使用AI技术		合计
	是	否	
不超过45岁	46	14	60
超过45岁	32	28	60
合计	78	42	120

(1)依据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，能否认为该市中学教师是否喜欢使用AI技术与年龄有关；

(2)将频率视为概率，现从所抽取的120名中学教师中随机抽取一人，在抽中喜欢使用AI技术的教师的条件下，求此人年龄超过45岁的概率.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.01	0.001
x_a	2.706	6.635	10.828

(1) 解：假设H_0：该市中学教师是否喜欢使用AI技术与年龄无关.

$$\chi^2=\frac{120(46\times28-14\times32)^2}{60\times60\times78\times42}=\frac{280}{39}\approx7.18>6.635.$$

综上有99%的把握认为该市中学教师喜欢使用AI技术与年龄有关.

(2) 解：设抽中喜欢使用AI技术的教师为事件A，此人年龄超过45岁为事件B.

$P(A)=\frac{78}{120}$　　$P(AB)=\frac{32}{120}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{16}{39}$

综上：概率为$\frac{16}{39}$

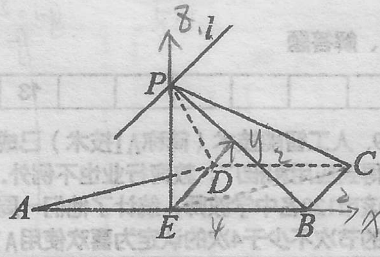
				15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

10. 如图，直角梯形$ABCD$中，$AB // CD, AB \perp BC, BC = CD = \frac{1}{2}AB = 2$，$E$为$AB$的中点，以$DE$为折痕把$\triangle ADE$折起，使点$A$到点$P$的位置，且$PC = 2\sqrt{3}$.

(1)设平面PBC与平面PDE的交线为l，证明：$BC // l$；

(2)证明：$PE \perp$平面$BCDE$；

(3)求二面角$B-PC-D$的余弦值.



(1) 证明：∵E为AB中点

∴$BE = \frac{1}{2}AB = 2$.

∵ $AB // CD$，$CD = 2$

∴ $BE \parallel\!= CD$

∴四边形CBED为平行四边形

∴ $CB // DE$

∵ $CB \not\subset$ 面PDE

$DE \subset$ 面PDE

∴ CB // 面PDE

∵ $CB \subset$ 面PBC

面PBC ∩ 面PDE = l.

BC // 面PDE

∴ $BC // l$.

连接CE.

(2) 证明：∵E为AB中点、

∴ $AE = PE = BE = \frac{1}{2}AB = 2$.

∵ $AB \perp BC$

∴ $\angle ABC = 90^\circ$

又∵四边形CBED为平行四边形 $BE = CB$.

∴四边形 CBED为正方形

∴ $CE = \sqrt{BE^2 + CB^2} = 2\sqrt{2}$. $DE \perp AE$

∵ $PE = 2$. $CE = 2\sqrt{2}$. $CP = 2\sqrt{3}$

∴ $PE^2 + CE^2 = CP^2$

∴ $\angle PEC = 90^\circ$ ∴ $PE \perp CE$

∵ $DE \perp AE$

∴ $\angle AED = 90^\circ$

∵ 翻折

∴ $\angle PED = 90^\circ$

∴ $PE \perp DE$

∵ $PE \perp DE$ $PE \perp CE$ $DE, CE \subset$ 面 BCDE. $PE \cap CE = E$.

∴ $PE \perp$ 面 BCDE

(3) 解：∵ $PE \perp$ 面 BCDE

∴ $PE \perp BE$. $PE \perp DE$.

又∵ $BE \perp DE$

∴以 EB. ED. EP 所在直线分别为 x y z 轴建系，

B(2, 0, 0).

P(0, 0, 2).

C(2, 2, 0).

D(0, 2, 0).

∴ $\vec{PC} = (2, 2, -2)$.

$\vec{BP} = (-2, 0, 2)$

$\vec{CD} = (-2, 0, 0)$.

设面PBC的法向量为$\vec{n_1} = (x_0, y_0, z_0)$

∴ $\begin{cases} x_0 + y_0 - z_0 = 0 \\ -x_0 + z_0 = 0 \end{cases}$ 令 $x_0 = 1$ $\vec{n_1} = (1, 0, 1)$

设面PCD的法向量为 $\vec{n_2} = (x_1, y_1, z_1)$

$\begin{cases} x_1 + y_1 - z_1 = 0. \\ x_1 = 0 \end{cases}$ 令 $z_1 = 1$

∴ $\vec{n_2} = (0, 1, 1)$.

设夹角为θ.

$\cos\theta = |\cos\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

以为钝二面角
由图可知，

综上，夹角余弦值为 $\frac{1}{2}$.