



姓名: 张姝妍

班级: 14

考场/座位号: \_\_\_\_\_

**注意事项**

- 1、答题前请将姓名、班级、考场、准考证号填写清楚。
- 2、客观题答案必须使用2B铅笔填涂，修改时用橡皮擦干净。
- 3、主观题使用黑色签字笔书写。
- 4、必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效。
- 5、保持卷面整洁、完整。

正确填涂  错误填涂

填涂									
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

$f(2-x) = a \ln(2x-2) + b(2-x) + c$   
 $= a \ln(2x-2) - bx + 2b + c$  } 相减  
 $-f(x) = -2 \ln(2x-2) - 2x$

缺考标记

一、选择题

$\begin{cases} a=2 & -b=-2 & 2b+c=0 \\ a=-2 & b=2 & c=-4 \end{cases}$ 
 $abc=16$

1 [A]  [B] [C] [D]    2 [A]  [B] [C] [D]    3  [A] [B] [C] [D]    4 [A]  [B] [C] [D]    5 [A]  [B] [C] [D]

6  [A] [B] [C] [D]

1. 函数  $y = \ln x - x$  的单调递增区间为 (B)  
 A.  $(-\infty, 1)$     B.  $(0, 1)$     C.  $(-1, 1)$     D.  $(1, +\infty)$

2. 若函数  $f(x) = e^{2x+1}$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$  处的切线方程为 (B)  
 A.  $2x + y + 2 = 0$     B.  $2x - y + 2 = 0$     C.  $2x + y - 2 = 0$     D.  $2x - y - 2 = 0$

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2\ln(2x-2) + 2x, & x > 1 \\ a\ln(-2x+2) + bx + c, & x < 1 \end{cases}$ , 若对  $\forall x \neq 1, f(2-x) = -f(x)$  恒成立, 则  $abc =$  (A)  
 A. -16    B. 16    C. -4    D. 4

$f(1) = f(2)$   
 $f(x) = -f(2-x)$

4. 已知函数  $f(x) = x \ln x + x(x-a)^2 (a \in \mathbb{R})$ . 若存在  $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ , 使得  $f(x) > x^2 f'(x)$  成立, 则实数  $a$  的取值范围是 (BC)  
 A.  $(\frac{9}{4}, +\infty)$     B.  $(\frac{3}{2}, +\infty)$     C.  $(\sqrt{2}, +\infty)$     D.  $(3, +\infty)$

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2a$   
 $g(x) \text{ min. } < 0$   
 $a > \sqrt{2}$   
 $\exists x, g'(x) < 0$

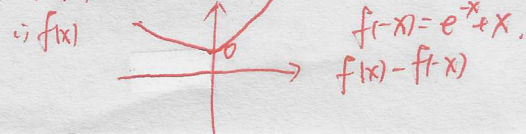
5 (多选). 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , 则下列结论正确的是 (BC)  
 A.  $f(x) \geq 0$  恒成立    B.  $f(x)$  只有一个零点  
 C.  $f(x)$  在  $x = \sqrt{e}$  处得到极大值  $\frac{1}{2e}$     D.  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的增函数

6 (多选). 已知函数  $f(x) = e^x - x$ , 对于任意实数  $a, b$ , 下列结论成立的有 (AD)  
 A.  $f(x)_{\min} = 1$     B. 函数  $f(x) = e^x - x$  在定义域上单调递增  
 C. 曲线  $f(x) = e^x - x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程是  $y = 1$     D. 若  $a = -b > 0$ , 则  $f(a) > f(b)$

$f(a) > f(-a) \iff a > 0$

$f(x) = e^x - 1$

$f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上  $(-\infty, 0)$  上



二、填空题

7. 已知函数  $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$ , 则  $f(x)$  的单调减区间为  $(0, 1) \cup (1, e)$  (0, 1), (1, e)

8. 对任意  $x > 0$ , 若不等式  $ax^2 \leq e^x + ax \ln x$  恒成立, 则实数  $a$  的最大值为  $e$ .

三、解答题

	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
--	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

9. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a \cos C - a \sin C - b + \sqrt{2}c = 0$ .

(1) 求  $A$ ; (2) 设  $D$  是边  $BC$  中点, 若  $\cos C = -\frac{3}{5}$ , 求  $\sin \angle ADC$ .

解: 由正弦定理可得,

$$\sin A \cos C - \sin A \sin C - \sin B + \sqrt{2} \sin C = 0$$

$$\sin A \cos C - \sin A \sin C - \sin(A+C) + \sqrt{2} \sin C = 0$$

$$-\sin A \sin C - \cos A \sin C + \sqrt{2} \sin C = 0$$

$\because C \in (0, \pi)$

$\therefore \sin C \neq 0$

$$\therefore \sin A + \cos A = \sqrt{2}$$

$$\sin(A + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{4} \in 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$A \in 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$\because A \in (0, \pi)$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4}$$

综上:  $A = \frac{\pi}{4}$

$$\because \cos C = -\frac{3}{5} \quad C \in (0, \pi) \quad \therefore \sin C = \frac{4}{5}$$

解:  $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\Rightarrow c = \frac{4\sqrt{2}}{5} a \quad \therefore a = \frac{5}{4\sqrt{2}} c$$

$$\vec{AD}^2 = \left[ \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \right]^2$$

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc}{4}$$

设  $\angle DAC = \alpha$

$\because C \in (0, \pi)$

$\therefore \sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

$$\triangle ACD \text{ 中 } \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin C}$$

$$\triangle ABD \text{ 中 } \frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)} = \frac{AD}{\sin B} = \frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{4} + C)}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\sqrt{2} \sin \alpha = 4\sqrt{2} \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

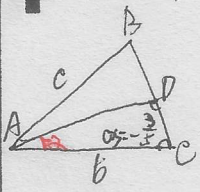
$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\sin \angle ADC = \sin(\pi - (C - \alpha))$$

$$= \sin(C + \alpha)$$

$$= \frac{8\sqrt{41}}{205}$$



10. 已知函数  $f(x) = e^{-x} + ax (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的最值;

(2) 若  $a = 0$ , 求证:  $f(x) > -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}$ .

(1) 解:  $f'(x) = -e^{-x} + a$   
 $= a - e^{-x}$

$= a - (\frac{1}{e})^x$

° 当  $a \leq 0$  时  $f'(x) < 0$  恒成立

∴  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上无最小值或最大值

≥° 当  $a > 0$  时 令  $f'(x) = 0$

$a = e^{-x}$

$\ln a = -x$

$x = -\ln a$

$x \quad (-\infty, -\ln a) \quad -\ln a \quad (-\ln a, +\infty)$

$f'(x) \quad - \quad 0 \quad +$

$f(x) \quad \searrow \quad \text{极小值} \quad \nearrow$

∴  $f(x)$  在  $x = -\ln a$  时取得极小值即

最小值

$f_{\min} = f(-\ln a) = a - a \ln a$

∴ 有最小值  $f_{\min} = a - a \ln a$   
 无最大值

注: 当  $a \leq 0$  时无最值

当  $a > 0$  时有最小值  $f(-\ln a) = a - a \ln a$   
 无最大值

(2) 解: 若  $a = 0$  则  $f(x) = e^{-x}$

$h(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}$

$h'(x) = -x - e^{-x}$

$h''(x) = -1 + e^{-x}$

∴  $h'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上  $\nearrow$

$h'(1) = -1 - \frac{1}{e} < 0$      $h'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e} < 0$

∴  $\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  使  $h'(x_0) = 0$

$h'(x_0) = -x_0 - e^{-x_0} = 0$

∴  $h(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上  $\searrow$  在  $(x_0, +\infty)$  上  $\nearrow$

∴  $h(x)$  的极小值  $h(x_0) = e^{-x_0} + \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{5}{8}$   
 $= x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{5}{8}$

令  $g(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}$      $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

$g'(x) = 1 + x > 0$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  恒成立

∴  $g(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  上  $\nearrow$

∴  $g(x) > g(\frac{1}{2}) > 0$

∴  $h(x)$  的极小值  $> 0$

∴  $h(x) > 0$

∴  $e^{-x} > -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}$