



2026届二轮复习 第39课时 简单函数及嵌套函数的零点问题作业

姓名: 张琳琳

班级: 14

考场/座位号: _____

注意事项

1. 答题前请将姓名、班级、考场、准考证号填写清楚。
2. 客观题答案必须使用2B铅笔填涂, 修改时用橡皮擦干净。
3. 主观题使用黑色签字笔书写。
4. 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效。
5. 保持卷面整洁、完整。

正确填涂 错误填涂

缺考标记

填涂

[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

一、选择题

- 1 [A] [B] [D] 2 [A] [B] [D] 3 [A] [B] [D] 4 [B] [C] [D] 5 [A] [B] [C] [D]
- 6 [A] [B] [D]

1. 关于 x 的方程 $(x^2 - 1)^2 - 3|x^2 - 1| + 2 = 0$ 的不相同实根的个数是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 8

2. 设定义域为 R 的函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} (x \neq 1) \\ 1 (x=1) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 5 个不同的实数解, 则 $b+c$ 值为

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 不能确定

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = 8f^2(x) - 6f(x) + 1$ 的零点个数为

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

4. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \frac{ax}{e^x} - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则 $\left(1 - \frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x_2}{e^{x_2}}\right) \left(1 - \frac{x_3}{e^{x_3}}\right)$ 的值为

- A. 1 B. -1 C. a D. -a

5. 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $g(f(x)) - a = 0$ 有 4 个实数根, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ D. $\left[1, \frac{5}{4}\right)$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{x-2} + 1, & x \leq 2 \\ -(x-2)^2 + 4a, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 \mathbb{R} 上为单调函数. 若方程 $f^2(x) - 4|f(x)| + 3 = 0$ 有 4 个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ C. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{4}, 1)$

二、填空题

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义域在 \mathbb{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sin(\frac{\pi}{2}x), & 0 \leq x \leq 1 \\ (\frac{1}{2})^x + 1, & x > 1 \end{cases}$

则函数 $g(x) = f(f(x)) - \frac{3}{4}$ 的零点个数为

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x + \frac{1}{e}, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(f(x) - a)$ 有四个零点, 则实数 a 的取值范围是

三、解答题

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 2a_n - 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{13}{20}$, 求满足条件的最大整数 n .

(1) 解: $S_n = 2a_n - 3 \Rightarrow a_1 = 3$
 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3$ ($n \geq 2$)

$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$
 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$
 $a_n = 2a_{n-1}$

$\therefore a_1 = 3 \neq 0$
 $\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ($n \geq 2$)

$\therefore \{a_n\}$ 为首项为 3 公比为 2 的等比数列

$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1}$

经上, a_n 的通项公式为

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(2) 解: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$
 $= \frac{1}{3 \times 2^0} + \frac{1}{3 \times 2^1} + \frac{1}{3 \times 2^2} + \dots + \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}$
 $= \frac{1}{3} [\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}]$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} [1 - (\frac{1}{2})^n]$

$\therefore n \in \mathbb{N}^*$

$\therefore a_n > 0$

$\therefore \frac{1}{a_n} > 0$

$\therefore T_n - T_{n-1} = \frac{1}{a_n} > 0$

$\therefore T_n$ 为单调递增数列

$\therefore T_5 = \frac{31}{48} < \frac{13}{20}$

$T_6 = \frac{21}{32} > \frac{13}{20}$

\therefore 最大正整数 n 为 5.

10. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
 - (2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
 - (3) 当 $a=1$ 时, 求证: $f(x) < e^x + x - 2$

解: $f'(x) = \frac{1}{x} - a$
 $= \frac{1-ax}{x}$ 定义域为 $(0, +\infty)$.

1° 当 $a \leq 0$ 时

$f'(x) > 0$ 恒成立
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 \uparrow .

2° 当 $a > 0$ 时

$\leq f'(x) = 0$
 $ax = 1$

$x \in (0, \frac{1}{a})$ 时 $f'(x) > 0$
 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$
 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上 \uparrow 取极大值
 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 \downarrow

综上: $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 \uparrow
 $a > 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上 \uparrow
 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 \downarrow .

- (2) 解: 1° 当 $a=0$ 时,
 $f(x) = \ln x$
 $f(1) = 0 > 0$ 与题意矛盾, 舍去.
- 2° 当 $a < 0$ 时,
 $f(x) = \ln x - ax$
 $f(1) = -a > 0$ 与题意矛盾, 舍去.
- 3° 当 $a > 0$ 时.

由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取极大值即最大值

$\therefore f(x) \leq 0$ 恒成立
 $\therefore f_{\max} \leq 0$
 $\therefore f(\frac{1}{a}) \leq 0$
 $f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 \leq 0$
 $\ln a \geq -1$
 $a \geq \frac{1}{e}$
 综上: $a \geq \frac{1}{e}$

(3) 解: $\therefore a=1$

$\therefore f(x) = \ln x - x$
 $\leq g(x) = f(x) - e^x - x + 2$
 $= \ln x - x - e^x - x + 2$
 $= \ln x - e^x - 2x + 2$
 $g'(x) = \frac{1}{x} - e^x - 2$
 $= \frac{1 - xe^x - 2x}{x}$

$\leq h(x) = -xe^x - 2x + 1$
 $h'(x) = -(e^x + xe^x) - 2$
 $= -e^x(x+1) - 2$
 $\therefore h'(x) < 0$ 恒成立 $\therefore x \in (0, +\infty)$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 \downarrow .

$\therefore h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 0$
 $h(1) = \frac{1}{2} - 1 - 2 = -\frac{3}{2} < 0$
 $= \frac{1}{2}(2 - e^{\frac{1}{2}})$
 $= \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{\frac{1}{2}})$
 $\because \ln 2 > \frac{1}{2}$
 $\therefore e^{\ln 2} > e^{\frac{1}{2}}$
 $\therefore h(\frac{1}{2}) > 0$

$\therefore \exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使 $g'(x_0) = 0$
 $\therefore x_0 e^{x_0} = 1 - 2x_0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上 \uparrow 在 $(x_0, +\infty)$ 上 \downarrow
 $g_{\max} = g(x_0) = \ln x_0 - e^{x_0} - 2x_0 + 2$
 $= \ln x_0 - 2x_0 - \frac{1}{x_0} + 4$
 $< \ln x_0 < x_0$

$\therefore \ln x_0 < x_0$ 即 $\ln x_0 < 2x_0$
 $\leq m(x) = 2\sqrt{x} - 2x + 4 - \frac{1}{x}$
 $m'(x) = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - 2$
 又 $\because x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时

$x^{-\frac{1}{2}} \in (\sqrt{2}, 2)$
 $x^{-\frac{3}{2}} \in (1, \sqrt{2})$
 $\therefore m'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
 $\therefore m(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上 \uparrow .

$$\ln x - x < e^x + x - 2.$$

$$\therefore \ln x \leq x - 1$$

$$\therefore \ln x - x \leq -1 < \exists g(x) = e^x + x - 2.$$

$$\because e^x + x - 2 \text{ 在 } (0, +\infty) \uparrow, \quad g'(x) = e^x + 1 > 0.$$

$$\therefore e^x + x - 2 > -1$$

$$\varphi(x_0) = \ln x_0 - 2x_0 - \frac{1}{x_0} + 0 \quad \frac{1}{3} < x_0 < \frac{1}{2}.$$

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{x_0} - 2 + \frac{1}{x_0^2} > 0,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 3 + \varphi = \frac{1}{3} - \ln 3 < 0.$$

~~证~~

$m(x)$ 在最大值 $m\left(\frac{1}{2}\right)$

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 + 0 \\ = 1 - \sqrt{2} < 0$$

$$\therefore m(x) \max < 0$$

$$m(x_0) < m(x) \max < 0$$

$$\therefore g(x_0) < m(x_0)$$

$$\therefore g(x_0) < 0$$

证